ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 16 — Februar 1936 — Heft 1

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Mathematischer Beitrag zur Theorie der Flügelschwingungen.

Von *v. Borbely* in Berlin.

Mitteilung aus dem Flugtechnischen Institut der T. H. Berlin, Prof. Dr.-Ing. H. Wagner.

Bei der Berechnung der Luftkräfte, die auf einen schwingenden Tragflügel wirken, erhält man auf Grund eines allgemeinen Ansatzes von H. Wagner[1]) folgende vier Integrale:

$$\varphi_s(\omega)=\int\limits_{x=0}^{\infty}\frac{\sin 2\,\omega x}{\sqrt{x+x^2}}\,d x\,,\qquad \varphi_c(\omega)=\int\limits_{x=0}^{\infty}\frac{\cos 2\,\omega x}{\sqrt{x+x^2}}\,d x\,,$$

$$f_s(\omega)=\int\limits_{x=0}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\sin 2\,\omega x\,d x\,,\qquad f_c(\omega)=\int\limits_{x=0}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\cos 2\,\omega x\,d x$$

$$(x,\omega>0;\ \text{reell}).$$

Die zahlenmäßige Beherrschung dieser Integrale ist bei der numerischen Auswertung der Fragen über Tragflügelschwingungen von Wichtigkeit. Statt Methoden der Reihenentwicklung[2]) anzuwenden, wollen wir im nachfolgenden zeigen, daß die Darstellung der Integrale auch in geschlossener Form durchführbar ist.

Zu diesem Zweck fassen wir φ_s und φ_c zu einem komplexen Integral

$$\Phi_1=\varphi_c-i\,\varphi_s=\int\limits_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-2\omega x i}}{\sqrt{x+x^2}}\,d x$$

zusammen und betrachten die bekannte Integraldarstellung der Hankelschen Funktion nullter Ordnung zweiter Art[3]):

$$\int\limits_{u=0}^{\infty}f(u)\,d u=\int\limits_{u=0}^{\infty}\frac{e^{-2 u x}}{\sqrt{u-i\,u^2}}\,d u=\frac{\pi}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,e^{i x}\,H_0^{(2)}(x)\,;\quad (x,u>0;\ \text{reell})\quad .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

[1]) H. Wagner: Dynamischer Auftrieb von Tragflügeln. ZAMM 1925, Bd. 5, S. 17 ff.

[2]) H. Glauert: The Force and Moment on an Oscillating Aerofoil. A. R. C. Reports and Memoranda No. 1242.

[3]) Riemann-Weber (Frank-Mises): Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. (1930), Bd. 1, S. 416.

mit $H_0^2(x) = J_0(x) - i\,N_0(x)$, wobei wie üblich[4]) $N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{Y_0(x) - J_0(x)\ln\frac{2}{\gamma}\right\}$ gesetzt wird. J_0 und Y_0 bedeuten dabei die Besselschen Funktionen nullter Ordnung erster resp. zweiter Art.

Integrieren wir nun die Funktion $f(u)$ in der komplexen $u = \xi + i\eta$-Ebene längs des geschlossenen Weges $\mathfrak{C}$ (Abb. 1), so folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz für alle $R, r > 0$

$$\oint_{(\mathfrak{C})} f(u)\,du = \int_{\xi=r}^{R} f(\xi)\,d\xi + \oint_{(K_R)} \ldots + \int_{\eta=R}^{r} f(i\eta)\,i\,d\eta + \oint_{(K_r)} \ldots = 0\,.$$

Die beiden Integrale längs der Viertelkreise K_ϱ ($\varrho = R$ oder r) schätzen wir nach der bekannten Formel $\left|\int f(u)\,du\right| \leq M \int |du|$ mit $|f(u)| \leq M$ ab.

Es ist

$$|f(u)| = \frac{e^{-2\varrho x\cos\varphi}}{\sqrt[4]{\varrho^2 + 2\varrho^3\sin\varphi + \varrho^4}} \leq \frac{e^{-2\varrho x\cos\varphi}}{\sqrt[4]{\varrho^2 + \varrho^4}}$$

und im ganzen Integrationsbereich $\cos\varphi \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, also wird

$$\left|\int_{(K_R)} f(u)\,du\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{R^2}}} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} e^{-2R\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}\,d\varphi < \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-2R}\right),$$

d. h.
$$\lim_{R\to\infty} \left|\int_{(K_R)} f(u)\,du\right| = 0\,.$$

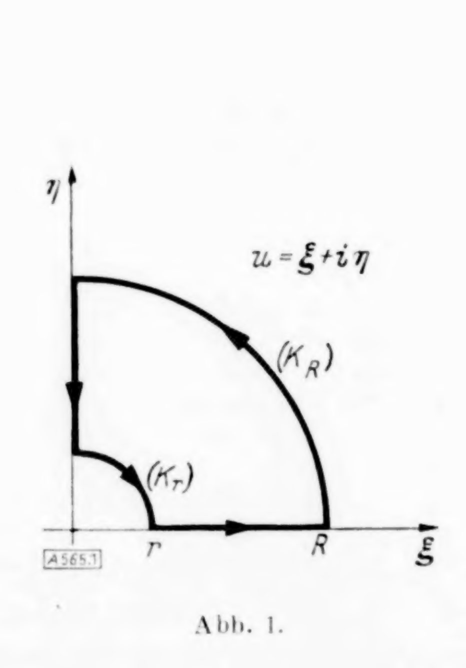


Abb. 1.

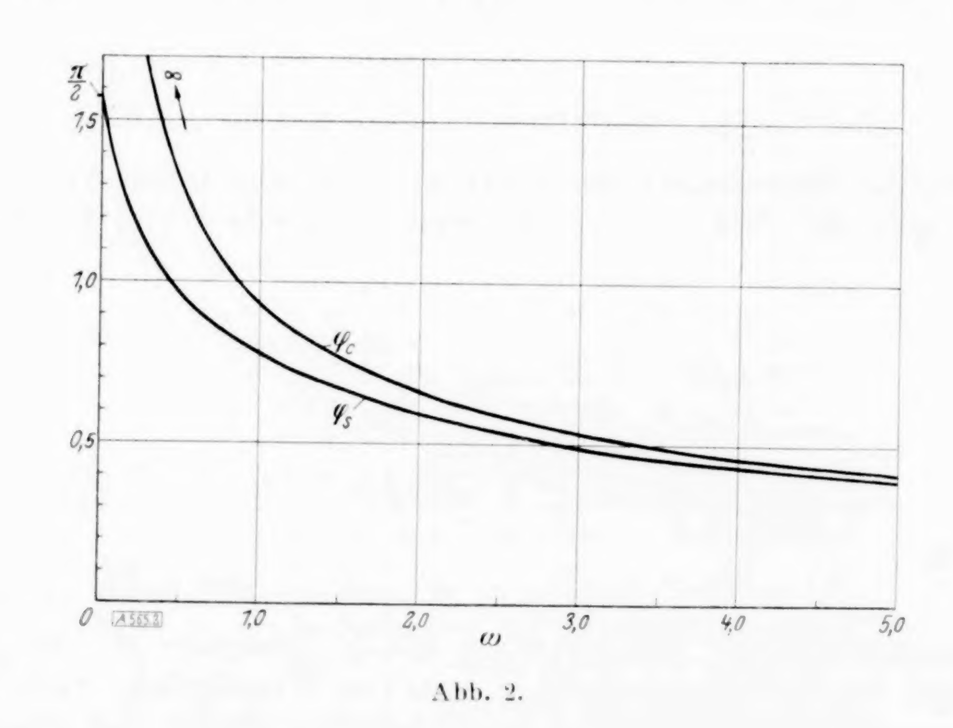


Abb. 2.

Entsprechend folgt für das vierte Integral $\lim_{r\to 0} \left|\int_{(K_r)} f(u)\,du\right| = 0\,.$
Somit ist

$$\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\,d\xi = \int_{\eta=0}^{\infty} f(i\eta)\,i\,d\eta = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\eta=0}^{\infty} \frac{e^{-2i\eta x}}{\sqrt{\eta + \eta^2}}\,d\eta\,,$$

worin $\omega \,||\, x$, $x \,||\, \eta$ gesetzt, mit Hilfe der Gl. (1)

$$\Phi_1 = \frac{\pi}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega} H_0^2(\omega)$$

liefert.

[4]) Jahnke-Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. (1909.)

Es ist also

$$\varphi_c = \Re\mathrm{e}\,\Phi_1 = \frac{\pi}{2}\,[\sin\omega\cdot J_0(\omega) - \cos\omega\cdot N_0(\omega)]\,,$$

$$\varphi_s = \Im\mathrm{m}\,\Phi_1 = \frac{\pi}{2}\,[\sin\omega\cdot N_0(\omega) + \cos\omega\cdot J_0(\omega)]\,.$$

Nun betrachten wir das dritte Integral.

Es ist

$$f_s(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{R}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\sin\lambda x\,d(\sin\lambda x)$$

$$= \frac{2}{\lambda}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\sin^2\lambda x\right]_{x=\varepsilon}^{R} - \frac{1}{\lambda}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda x}{x\sqrt{x+x^2}}\,dx - f_s(\lambda)\,,$$

also

$$f_s(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda x}{x\sqrt{x+x^2}}\,dx\,.$$

Die Differentiation nach dem Parameter λ liefert demnach

$$f'_s(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}f_s(\lambda) + \frac{1}{2\lambda}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\sin 2\lambda x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx\,,$$

oder

$$\frac{d}{d\lambda}(2\lambda f_s(\lambda)) = \varphi_s(\lambda)\,.$$

Ebenso erhalten wir auch für das vierte Integral $(0 < a_1 \leqq \lambda \leqq a_2)$

$$f_c(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\int_{x=0}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)d(\sin 2\lambda x) = \frac{1}{4\lambda}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\sin 2\lambda x}{x\sqrt{x+x^2}}\,dx\,,$$

$$f'_c(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}f_c(\lambda) + \frac{1}{2\lambda}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\cos 2\lambda x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx\,,$$

d. h.

$$\frac{d}{d\lambda}(2\lambda f_c(\lambda)) = \varphi_c(\lambda)\,.$$

Wir können daher schreiben $\frac{d}{d\lambda}[2\lambda\{f_c - i f_s\}] = \Phi_1(\lambda)$, oder

$$2x\{f_c(x) - i f_s(x)\} = -i\frac{\pi}{2}\int_{\lambda=0}^{x} e^{i\lambda}(J_0(\lambda) - i\,N_0(\lambda))\,d\lambda\,.$$

Die rechts auftretenden Integrale sind nach einer kurzen Zwischenrechnung wiederum im wesentlichen durch Besselsche Funktionen auszudrücken[5]).

[5]) Watson: A treatise on the theory of Bessel functions (1922). S. 380.

Zu dem Zweck bilden wir

$$u(x) = \int_{\lambda=0}^{x} \cos(x-\lambda)\, Z_0(\lambda)\, d\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

wobei Z_0 für J_0 bzw. N_0 steht. Durch zweimalige Differentiation nach x folgt daraus

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + u(x) = Z'_0(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Da Z_0 die Differentialgleichung $Z''_0 + \frac{1}{x} Z'_0 + Z_0 = 0$ erfüllt, ist $x\, Z_0(x)$ eine partikuläre Lösung von (3), dessen allgemeines Integral $u(x) = x\, Z_0(x) + A \sin x + B \cos x$ sein wird. Bilden wir $\frac{d u}{d x}$ und setzen $Z_0 = -Z_1$, so ergibt sich das Integral

$$\int_{\lambda=0}^{x} \sin(x-\lambda)\, Z_0(\lambda)\, d\lambda = x\, Z_1(x) - A \cos x + B \sin x,$$

woraus

$$\int_{\lambda=0}^{x} e^{i\lambda} Z_0(\lambda)\, d\lambda = e^{ix} x\,(Z_0 - i Z_1) + A\, i + B$$

folgt. Da sowohl für $Z_0 = J_0$ wie auch $Z_0 = N_0$

$$\lim_{x \to 0} \int_{\lambda=0}^{x} e^{i\lambda} Z_0(\lambda)\, d\lambda = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} x\, Z_0(x) = 0 \quad \text{ist, und} \quad \lim_{x \to 0} \begin{cases} x\, J_1(x) = 0 \\ x\, N_1(x) = -\dfrac{2}{\pi} \end{cases}$$

ergibt[1]), erhalten wir

$$\int_{\lambda=0}^{x} e^{i\lambda} J_0(\lambda)\, d\lambda = e^{ix} x\,(J_0 - i J_1), \qquad \int_{\lambda=0}^{x} e^{i\lambda} N_0(\lambda)\, d\lambda = e^{ix} x\,(N_0 - i N_1) - \frac{2}{\pi}\, i$$

oder

$$f_c(x) - i f_s(x) = -\frac{\pi}{4} e^{ix} [(J_0\, i + J_1) + (N_0 - i N_1)] + \frac{i}{2x}.$$

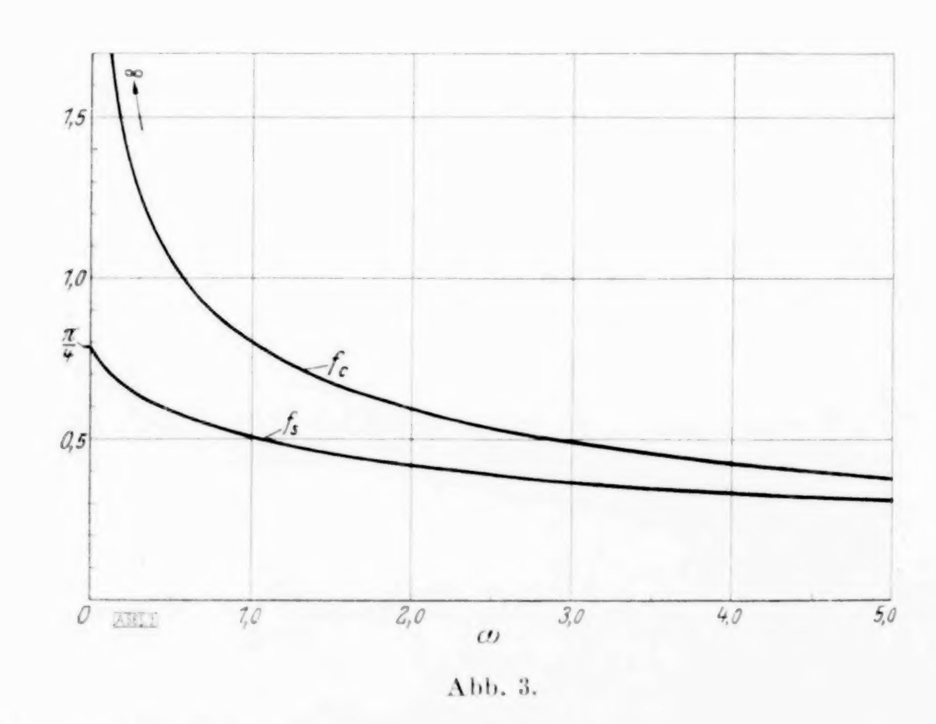


Abb. 3.

damit wird ($\omega \,\|\, x$)

$$f_s(\omega) = \frac{\pi}{4} [\sin \omega \{J_1(\omega) + N_0(\omega)\} + \cos \omega \{J_0(\omega) - N_1(\omega)\}] - \frac{1}{2\omega},$$

$$f_c(\omega) = \frac{\pi}{4} [\sin \omega \{J_0(\omega) - N_1(\omega)\} - \cos \omega \{J_1(\omega) + N_0(\omega)\}].$$

Elastische Schwingungen, die sich von einem zeitlich und räumlich begrenzten Oberflächenspannungsgebiet in einen isotropen homogenen elastischen Halbraum ausbreiten.

Von *Erik Hallén* in Uppsala.

Wir stellen uns die Aufgabe, folgendes Problem zu lösen: Ein von einer Ebene begrenzter, sonst aber unendlicher, homogener isotroper Körper sei bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe; dann beginnen innerhalb eines endlichen Gebietes der Oberfläche Spannungen, die bekannte willkürliche Funktionen von Ort und Zeit sind, den Körper anzugreifen; man suche in jedem folgenden Augenblick den Bewegungszustand eines jeden Punktes des Körpers. — Dieses Problem, das seismisches Interesse besitzt, ist mehrmals in Angriff genommen worden. Besonders wichtig ist die Arbeit von Lamb [1]), der das Problem für die Punkte der Oberfläche bei senkrechter Belastung gelöst hat. Auch in letzter Zeit sind umfangreiche theoretische Untersuchungen über die elastische Wellenausbreitung erschienen [2]). Das seismische Interesse ist keineswegs auf die sich in der Oberfläche fortpflanzende Störung begrenzt. Bei Erdbeben sind beispielsweise die sogenannten Präliminarwellen, die sich durch das Erdinnere fortgepflanzt haben, für die Beurteilung des Abstandes einer Störungswelle von Bedeutung. Eine Erweiterung der Formeln Lambs dahin, daß sie sich nicht nur auf die Oberfläche und auf senkrechte Belastung, sondern auf das ganze Innere des Mediums und auf beliebige Belastung beziehen, scheint daher wünschenswert zu sein, war aber bisher noch nicht vorgenommen worden [3]).

§ 1. Herleitung der Lösung. Wir behandeln einen zweidimensionalen Fall. Wenn x_1, x_2, x_3 die Raumkoordinaten sind, wählen wir die $x_1 x_3$-Ebene als Begrenzungsebene des Körpers, lassen die x_2-Achse nach dem Innern des Körpers gerichtet sein und die x_3-Achse parallel derjenigen Richtung, der entlang alle Größen unveränderlich sind. Die Verschiebungskomponenten ξ_1 und ξ_2 eines Punktes (x_1, x_2) leiten wir aus den beiden Potentialen Φ und A folgendermaßen ab:

$$\xi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial A}{\partial x_2}, \qquad \xi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial A}{\partial x_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei Φ und A gemäß den elastischen Bewegungsgleichungen folgende Differentialgleichungen befriedigen müssen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2b),$$

wo σ_1 und σ_2 die elastischen Geschwindigkeiten bezeichnen. Man hat $\sigma_1 > \sigma_2$. Die Gl. (1, 2a, b) sind für $x_2 > 0$, $t > 0$ gültig. Die Oberflächenspannungen $S_{12}(x_1\, t)$ und $S_{22}(x_1\, t)$ verschwinden für $t < 0$ und außerhalb des endlichen Intervalls Ω der x_1-Achse. An der Oberfläche $x_2 = 0$ soll nach den Spannungsgleichungen gelten:

$$S_{12} = \varrho\, \sigma_2^2 \lim_{x_2 = 0} \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3a),$$

$$S_{22} = \varrho \lim_{x_2 = 0} \left(\sigma_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + (\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - 2\sigma_2^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad \ldots \ldots \quad (3b),$$

wo ϱ die Dichte des Mediums ist. Wir haben nun für $t > 0$ aus (1, 2, 3) diejenigen ξ_1 und ξ_2 als Funktion von $x_1\, x_2\, t$ zu bestimmen, welche außerdem die Anfangsbedingungen $\xi_1 = \xi_2 = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0$ für $t = 0$ befriedigen.

Es befriedigen nun $\Phi = \Phi_0(\alpha\,\tau)\, e^{i[\beta(x_1 - \alpha) + \delta_1 x_2 + \gamma(t - \tau)]}$

$A = A_0(\alpha\,\tau)\, e^{i[\beta(x_1 - \alpha) + \delta_2 x_2 + \gamma(t - \tau)]}$, $S_{j2} = S_{j2}(\alpha\,\tau)\, e^{i[\beta(x_1 - \alpha) + \gamma(t - \tau)]}$

[1]) H. Lamb: Phil. Trans. Roy. Soc. London A 203, 1904.

[2]) Siehe z. B.: H. Nakano: Geophysical Mag. Tokyo, II Nr. 4, 1930, wo jedoch nur beständig existierende, zeitlich periodische Kräfte berücksichtigt werden, wodurch das Interesse wesentlich beschränkt wird.

[3]) Eine Arbeit von H. Ramström, Arkiv f. Mat., Astr. o. Fysik, Stockholm, 22 A, Nr. 6, führt für die Oberfläche zu ganz anderen Ergebnissen als die von Lamb und ist gänzlich unrichtig.

die Gl. (2a, b), wenn $\delta_1 = \pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_1^{\,2}} - \beta^2}$ und $\delta_2 = \pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}} - \beta^2}$ ist, und außerdem für $x_2 = 0$ die Gl. (3a, b), wenn:

$$\Phi_0 = \frac{1}{\varrho\,\sigma_2^{\,2}} \cdot \frac{-S_{12}(\alpha\tau)\,2\beta\,\delta_2 + S_{22}(\alpha\tau)\,(\beta^2 - \delta_2^{\,2})}{(\beta^2 - \delta_2^{\,2})^2 + 4\,\beta^2\,\delta_1\,\delta_2}\,, \qquad A_0 = \frac{1}{\varrho\,\sigma_2^{\,2}} \cdot \frac{S_{12}(\alpha\tau)\,(\beta^2 - \delta_2^{\,2}) + S_{22}(\alpha\tau)\cdot 2\,\beta\,\delta_1}{(\beta^2 - \delta_2^{\,2})^2 + 4\,\beta^2\,\delta_1\,\delta_2}\,.$$

Aus der Fourierdarstellung der Spannungen:

$$S_{j2}(x_1\,t) = \frac{1}{4\,\pi^2}\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} S_{j2}(\alpha\tau)\,e^{i\,[\beta\,(x_1 - \alpha) + \gamma\,(t - \tau)]}\,d\beta\,d\gamma\,d\alpha\,d\tau$$

erhalten wir somit eine formale Lösung der Potentiale:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= \frac{i}{4\,\pi^2\,\varrho\,\sigma_2^{\,2}}\,\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{S_{12}(\alpha\tau)\,2\beta\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}} - \beta^2} + S_{22}(\alpha\tau)\left(2\beta^2 - \frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}}\right)\right\} e^{\,i\left[\beta\,(x_1 - \alpha) - x_2\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_1^{\,2}} - \beta^2} + \gamma\,(t - \tau)\right]}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_1^{\,2}} - \beta^2}\left\{\left(2\,\beta^2 - \frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}}\right)^2 + 4\,\beta^2\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_1^{\,2}} - \beta^2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}} - \beta^2}\right\}}\,d\beta\,d\gamma\,d\alpha\,d\tau \\
A &= \frac{i}{4\,\pi^2\,\varrho\,\sigma_2^{\,2}}\,\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{S_{12}(\alpha\tau)\left(2\,\beta^2 - \frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}}\right) - S_{22}(\alpha\tau)\,2\,\beta\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_1^{\,2}} - \beta^2}\right\} e^{\,i\left[\beta\,(x_1 - \alpha) - x_2\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}} - \beta^2} + \gamma\,(t - \tau)\right]}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}} - \beta^2}\left\{\left(2\,\beta^2 - \frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}}\right)^2 + 4\,\beta^2\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_1^{\,2}} - \beta^2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sigma_2^{\,2}} - \beta^2}\right\}}\,d\beta\,d\gamma\,d\alpha\,d\tau
\end{aligned}\right\} \quad (4),$$

wo wir von vornherein die unteren Vorzeichen von δ_1 und δ_2 eingeführt haben, was unten näher begründet wird. Die Ausdrücke (4) sind insofern Lösungen der Gl. (2a, b; 3a, b), als jene Gleichungen erfüllt werden, wenn es erlaubt ist, die Ableitungen unter dem Integralzeichen auszuführen. Durch passende Wahl der Wurzelzweige und Integrationswege werden wir (4) nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge konvergente Bedeutung geben[4]) und dann im nächsten Paragraphen zeigen, daß die derart erhaltenen Lösungen tatsächlich die Gl. (2a, b; 3a, b) befriedigen. Dabei lassen wir uns von den noch nicht benutzten Anfangsbedingungen, Ruhelage für $t < 0$, leiten.

Wenn wir $\alpha\,\tau\,\beta$ reell festlegen, ist zu erwarten, daß die komplexe γ-Ebene an einem passenden Schnitt entlang aufzuschneiden ist, der nicht überschritten werden darf und auf dessen einer Seite entsprechend den Anfangsbedingungen der Integrationsweg in der γ-Ebene liegt. Offenbar hat der Integrand als Funktion von γ die vier Verzweigungspunkte $\pm\,\sigma_2\,\beta$, $\pm\,\sigma_1\,\beta$ und ein Schnitt zwischen den äußersten von diesen trennt die Werte des Integranden. Bevor wir jedoch die den Anfangsbedingungen entsprechenden Wurzelzweige und Wege wählen können, müssen wir einen anderen wichtigen Umstand untersuchen, nämlich die Pole des Integranden. Wenn wir $\gamma = \sigma_2\,|\beta|\,\zeta$ setzen, haben wir die Funktion zu untersuchen:

$$D(\zeta) = (2 - \zeta^2)^2 + 4\sqrt{\zeta^2 - 1}\sqrt{\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\,\zeta^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wir wählen von vornherein das ζ-Blatt (im Sinne Riemanns), in dem bei Begrenzung durch den reellen Schnitt von $-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ nach $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ die beiden Wurzeln für positives reelles großes ζ positiv werden. $D(\zeta)$ ist (teilweise) schon früher von Rayleigh[5]) untersucht worden. D hat eine zweifache Nullstelle für $\zeta = 0$ und einfache reelle Nullstellen für $\zeta = \pm\,\varkappa$, wo $0 < \varkappa < 1$. Außerdem gibt es noch weitere Nullstellen, die, wenn sie reell sind, offenbar nicht in unserem ζ-Blatt liegen können, weder im Intervall $-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ nach -1 oder 1 nach $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ oder außerhalb des Schnitts. Soweit Rayleighs Ergebnisse. Uns interessiert jedoch auch die Lage komplexer

[4]) N. Zeilon: Arkiv f. Mat., Astr. o. Fysik, Stockholm **6**, 1911 und **9**, 1913. Unser Problem ist im Gegensatz zu Zeilons ein gemischtes.

[5]) Rayleigh: Proc. London Math. Soc. 17, 1885; ferner Lamb l. c., S. 12.

Nullstellen. Ohne hier auf den Beweis ausführlicher einzugehen, sei angeführt, daß sich zeigen läßt, daß diese komplexen Nullstellen für $\sigma_1 > \sigma_2$ nicht in unserem ζ-Blatt liegen können. (Ich bemerke hier nur, daß es solche Werte von $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ gibt, bei denen alle Nullstellen reell werden; die außerhalb des Schnittes liegenden können dann nicht kontinuierlich in unser ζ-Blatt hinüberwandern, da sie nicht auf dem Schnitt liegen dürfen.)

Wir können nun zur Bestimmung von Integrationsweg und Wurzelzweig übergehen. Damit der Exponentialausdruck in (4) auf einem großen Halbkreis überall in der einen komplexen Halbebene für jeden negativen Wert von t verschwindet, ist erforderlich, daß sich hier der Koeffizient von x_2 (man hat $x_2 > 0$) im Exponenten wie $-\frac{\gamma}{\sigma_1}$ bzw. $-\frac{\gamma}{\sigma_2}$ verhält, und dies findet in der unteren Halbebene statt. Daraus erklärt sich das schon oben eingeführte Vorzeichen von δ_1 bzw. δ_2, wenn wir unter den Wurzeln den für großes positives reelles γ positiven Zweig verstehen. Ebenso erhält man daraus, daß der Integrationsweg in γ auf der Unterseite des Schnittes verlaufen muß, und da es dann entsprechend den obigen Angaben

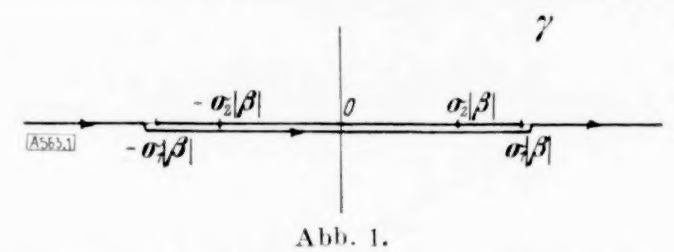


Abb. 1.

über D unterhalb dieses Weges keine Singularitäten gibt, kann dieser Integrationsweg tatsächlich in der unteren Halbebene mit dem Resultat 0 für $t < 0$ in sich geschlossen werden. (Es ist ja S_{12} und $S_{22} = 0$ für $\tau < 0$.) Auch für $t - \tau < \frac{x_2}{\sigma_1}$ (für Φ) und für $t - \tau < \frac{x_2}{\sigma_2}$ (für A) kann die Integration entlang der reellen Achse in der γ-Ebene mit demselben Halbkreis ergänzt werden und das Resultat wird 0.

Für den übrigen Bereich $0 < \tau < t - \frac{x_2}{\sigma}$ bleibt noch der Integrationsweg für γ nach Abb. 1. Wir ersetzen im Ausdruck (4) für Φ: $\gamma = \sigma_1 |\beta| \zeta$ und im Ausdruck für A: $\gamma = \sigma_2 |\beta| \zeta$ und führen als Integrationsveränderliche ζ statt γ ein. Dabei erhält man aus (4) nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\Phi = \frac{1}{\pi \sigma_2 \varrho} \frac{\partial}{\partial x_2} \int\limits_{\Omega} d\alpha \int\limits_{0}^{t - \frac{x_2}{\sigma_1}} \{ f_1 S_{12}(\alpha \tau) + f_2 S_{22}(\alpha \tau) \} \, d\tau \quad \text{(6a)},$$

$$A = \frac{1}{\pi \sigma_2 \varrho} \frac{\partial}{\partial x_2} \int\limits_{\Omega} d\alpha \int\limits_{0}^{t - \frac{x_2}{\sigma_2}} \{ g_1 S_{12}(\alpha \tau) + g_2 S_{22}(\alpha \tau) \} \, d\tau \quad \text{(6b)},$$

wo

$$f_1 = \frac{i}{4\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta \int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta \frac{\beta}{|\beta|} 2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \zeta^2 - 1}}{\beta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \, D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \zeta\right)} e^{i\beta(x_1 - \alpha) + i|\beta| [-x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta \sigma_1 (t - \tau)]} \quad \text{(7a)},$$

$$f_2 = \frac{i}{4\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta \int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta \left(2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \zeta^2\right)}{\beta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \, D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \zeta\right)} e^{i\beta(x_1 - \alpha) + i|\beta| [-x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta \sigma_1 (t - \tau)]} \quad \text{(7b)},$$

$$g_1 = \frac{i}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta \int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta (2 - \zeta^2)}{\beta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \, D(\zeta)} e^{i\beta(x_1 - \alpha) + i|\beta| [-x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta \sigma_2 (t - \tau)]} \quad \text{(7c)},$$

$$g_2 = \frac{i}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta \int\limits_{\Gamma} \frac{-d\zeta \frac{\beta}{|\beta|} 2 \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \zeta^2 - 1}}{\beta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \, D(\zeta)} e^{i\beta(x_1 - \alpha) + i|\beta| [-x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta \sigma_2 (t - \tau)]} \quad \text{(7d)}.$$

Hier bezeichnet der Integrationsweg Γ die reelle Achse in positivem Sinn, aber auf der Unterseite des Schnittes -1 nach $+1$, bzw. $-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ nach $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, und alle Wurzelzeichen wie gewöhnlich den für großes reelles positives ζ positiven Zweig. Γ kann in der oberen Halbebene geschlossen werden, und wenn in (7) die Exponentialfunktion durch die beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung nach Potenzen des Exponenten ersetzt würden, würde das innere Integral in (7) verschwinden, da sich $D(\zeta)$ für große ζ wie ζ^4 verhält; $\beta = 0$ bereitet deshalb keine Schwierigkeit in (7). Die Doppelintegrale (7) können nun durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge ausgeführt werden. Dabei gestalten sich Rechnung und Ergebnis in den beiden ersten Integralen, wo die Verzweigungsstellen des Exponenten die äußersten von $D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)$ sind, wesentlich anders als in den beiden letzteren, wo die Verzweigungspunkte des Exponenten die inneren Verzweigungspunkte von $D(\zeta)$ sind (Gl. (5)). Wir beginnen mit f_1 und bemerken zunächst, daß vor Vertauschung der Integrationsreihenfolge der Integrationsweg Γ dem Schnitt auf einem beliebigen Bogen in der unteren Halbebene ausweichen kann (Abb. 2).

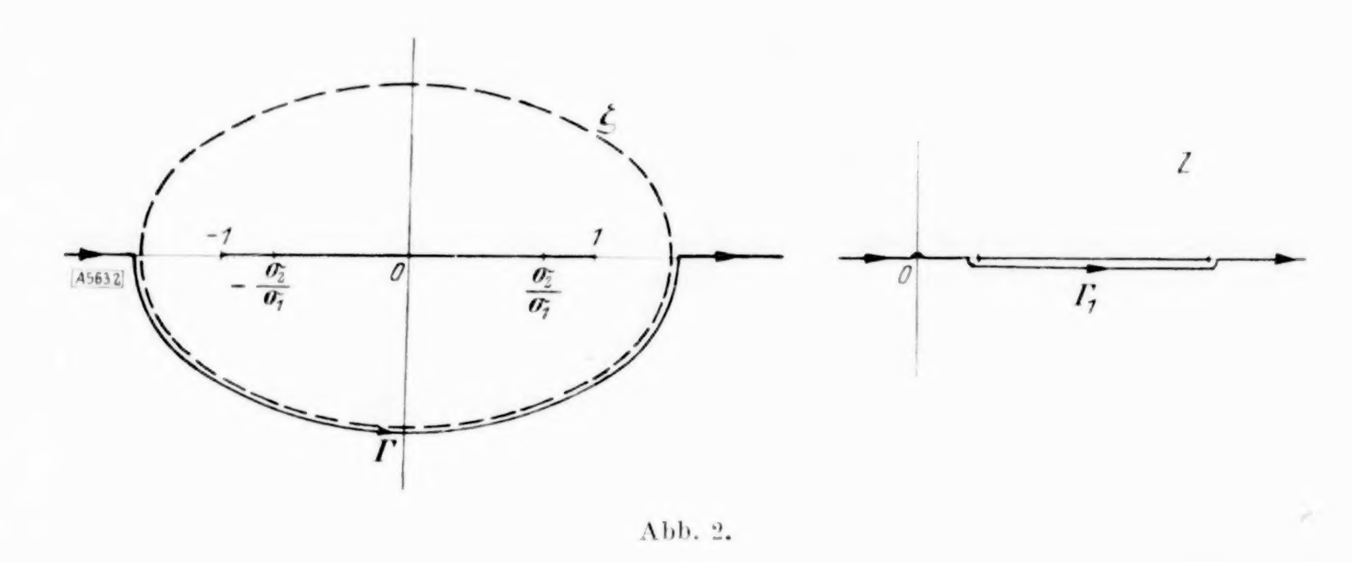


Abb. 2.

Wir betrachten positive und negative β gesondert und führen aus Gründen der Vereinfachung noch eine Abbildung ein, indem wir setzen:

$$z = \zeta\,\sigma_1(t-\tau) - x_2\sqrt{\zeta^2-1} + \frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a) \quad \ldots \quad (8),$$

woraus folgt:

$$\zeta = \frac{\sigma_1(t-\tau)\left(z-\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)\right) + x_2\sqrt{\left(z-\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)\right)^2 + x_2^2 - \sigma_1^2(t-\tau)^2}}{\sigma_1^2(t-\tau)^2 - x_2^2} \quad \ldots \quad (9).$$

(z sind natürlich zwei verschiedene Funktionen, je nachdem β positiv oder negativ ist; es ist jedoch bequemer, sie nicht gesondert ausschreiben zu müssen.) Wenn wir die z-Ebene entlang des Schnittes von $z = \frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a) - \sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2 - x_2^2}$ nach $z = \frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a) + \sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2 - x_2^2}$ aufschneiden und das z-Blatt betrachten, in dem für großes positives z die Wurzel in (9) positiv ist, so bildet dieses dann die Abbildung des Teils der ζ-Ebene, der außerhalb des gestrichelten Umrisses in Abb. 2 liegt. Dieser Umriß schneidet die reelle ζ-Achse in den Punkten $\pm\frac{\sigma_1(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2 - x_2^2}}$ und umschließt somit vollständig alle Verzweigungspunkte $\left(\pm 1, \pm\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$ in den Integranden in (7a) und (7b). Der Umstand, daß entsprechende Verhältnisse in (7c) und (7d) nicht vorliegen, verursacht, wie wir unten finden werden, den wesentlichen Unterschied der Verbreitungsweise der langsamen und der raschen Wellen im Halbraume. Wir können nun Γ in der ζ-Ebene dem genannten Umriß folgen lassen und erhalten einen Integrationsweg Γ_1 in der z-Ebene entlang der reellen z-Achse auf der Unterseite des Schnittes. Bevor wir in (7a) die Reihenfolge vertauschen, trennen wir für β das Intervall $(-a, 0)$ bzw. $(0, +a)$ ab und ersetzen in ihnen den Exponentialausdruck durch denselben Ausdruck vermindert um die beiden ersten Glieder in seiner Potenzreihenentwicklung, welche Glieder laut

obigem ohne Einfluß sind, es aber ermöglichen, mit der Integration nach β zu beginnen; a ist eine willkürliche positive Zahl. Aus (8) ergibt sich:

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}=\frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)\right)^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}},$$

und wir erhalten damit aus (7a):

$$f_1=-\frac{i\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta'^2-1}\,I_1\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta'\right)\sqrt{(z+(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}$$

$$+\frac{i\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma'_1}\frac{2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta''^2-1}\,I_2\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta''\right)\sqrt{(z-(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}},$$

wo

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{-a}\frac{e^{-i\beta z}}{\beta^2}\,d\beta+\int\limits_{-a}^{0}\frac{e^{-i\beta z}-1+i\beta z}{\beta^2}\,d\beta;\quad I_2=\int\limits_{0}^{a}\frac{e^{i\beta z}-1-i\beta z}{\beta^2}\,d\beta+\int\limits_{a}^{\infty}\frac{e^{i\beta z}}{\beta^2}\,d\beta,$$

wo man ζ' und ζ'' aus (9) erhält, wenn man $\frac{\beta}{|\beta|}=-1$ bzw. $+1$ setzt. Die Integrationswege Γ'_1 und Γ''_1 in der z-Ebene nach Abb. 2 sind verschieden, da der Schnitt für das letztere Integral im Verhältnis zu dem des ersteren verschoben ist. Man findet nun sowohl für I_2 als auch für I_1:

$$I_2=I_1=\frac{1}{a}+iz\left(1+\frac{\pi i}{2}-0{,}5772\ldots-\log a\right)-iz\log z,$$

wo z reell ist und $\arg z=0$ für $z>0$ und $\arg z=\pi$ für $z<0$. Um nach der Integration in β einen analytisch zusammenhängenden Integrationsweg Γ'_1 zu erhalten, müssen wir somit den Nullpunkt $(z=0)$ in der oberen Halbebene umgehen, und wenn der Nullpunkt auf dem Schnitt liegt, über diesen hinaus fortsetzen, so daß der Bogen um den Nullpunkt in dem sonst verbotenen z-Blatt liegt. Bei Ausführung der Integration in z ist nun nur das letzte Glied in I_2 und I_1 von Einfluß, und wir erhalten:

$$f_1=-\frac{\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{z\log z\cdot 2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta'^2-1}\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta'\right)\sqrt{(z+(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}$$

$$+\frac{\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma'_1}\frac{z\log z\cdot 2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta''^2-1}\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta''\right)\sqrt{(z-(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}.$$

Der Integrationsweg Γ'_1 bzw. Γ''_1 kann nun in eine Doppellinie umgeändert werden, welche den Schnitt nicht trifft, in der unteren Halbebene unendlich entfernt vom Nullpunkt beginnt und diesen in negativem Sinne umläuft. Die Differenz zwischen den Werten von $\log z$ auf dem Hin- und dem Rückweg ist dann $2\pi i$. Wir führen ferner wieder die Veränderliche ζ ein. Mit unseren Wurzelzweigen erhalten wir in $z=0$ folgende Gleichungen: $\zeta'=\zeta_1$, $\zeta''=\zeta_1'$, wo für $r>\sigma_1(t-\tau)$ $\quad(r=\sqrt{(x_1-a)^2+x_2^2})$:

$$\zeta_1=\frac{\sigma_1(t-\tau)(x_1-a)+x_2\frac{x_1-a}{|x_1-a|}\sqrt{r^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}{\sigma_1^2(t-\tau)^2-x_2^2}\quad\ldots\ldots\quad(10\text{a}),$$

$$\zeta_1'=-\zeta_1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10\text{b}),$$

Hier bezeichnet der Integrationsweg Γ die reelle Achse in positivem Sinn, aber auf der Unterseite des Schnittes -1 nach $+1$, bzw. $-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ nach $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, und alle Wurzelzeichen wie gewöhnlich den für großes reelles positives ζ positiven Zweig. Γ kann in der oberen Halbebene geschlossen werden, und wenn in (7) die Exponentialfunktion durch die beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung nach Potenzen des Exponenten ersetzt würden, würde das innere Integral in (7) verschwinden, da sich $D(\zeta)$ für große ζ wie ζ^4 verhält; $\beta = 0$ bereitet deshalb keine Schwierigkeit in (7). Die Doppelintegrale (7) können nun durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge ausgeführt werden. Dabei gestalten sich Rechnung und Ergebnis in den beiden ersten Integralen, wo die Verzweigungsstellen des Exponenten die äußersten von $D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)$ sind, wesentlich anders als in den beiden letzteren, wo die Verzweigungspunkte des Exponenten die inneren Verzweigungspunkte von $D(\zeta)$ sind (Gl. (5)). Wir beginnen mit f_1 und bemerken zunächst, daß vor Vertauschung der Integrationsreihenfolge der Integrationsweg Γ dem Schnitt auf einem beliebigen Bogen in der unteren Halbebene ausweichen kann (Abb. 2).

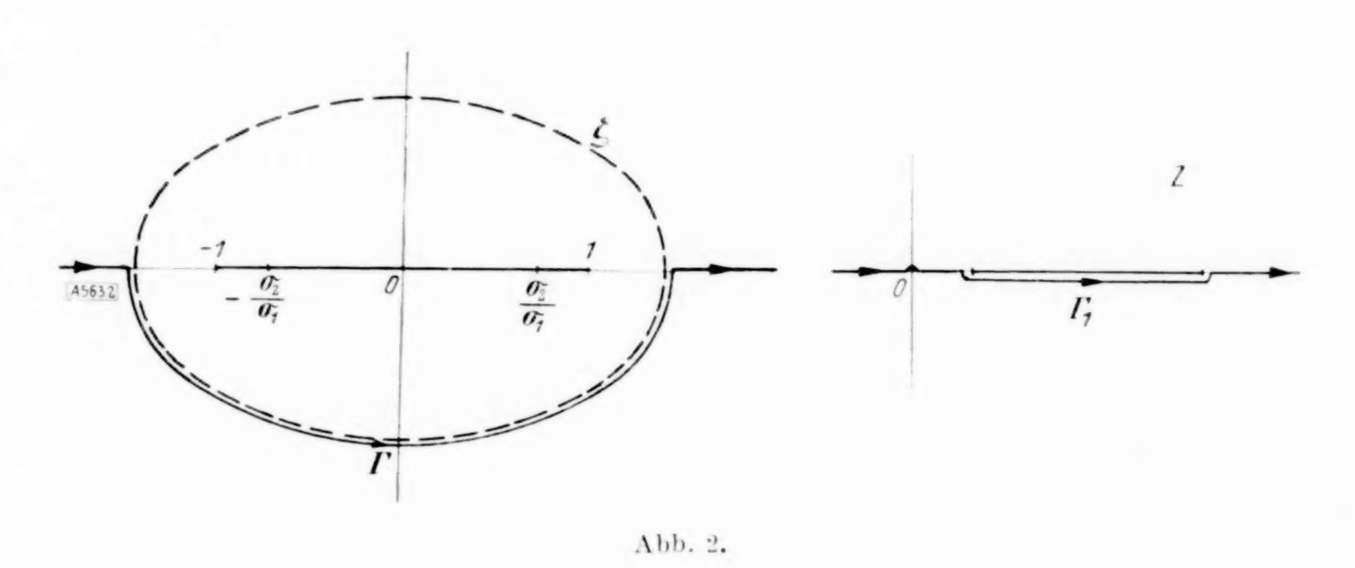


Abb. 2.

Wir betrachten positive und negative β gesondert und führen aus Gründen der Vereinfachung noch eine Abbildung ein, indem wir setzen:

$$z = \zeta\,\sigma_1 (t-\tau) - x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} + \frac{\beta}{|\beta|}(x_1 - a) \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

woraus folgt:

$$\zeta = \frac{\sigma_1 (t-\tau)\left(z - \frac{\beta}{|\beta|}(x_1 - a)\right) + x_2 \sqrt{\left(z - \frac{\beta}{|\beta|}(x_1 - a)\right)^2 + x_2^2 - \sigma_1^2 (t-\tau)^2}}{\sigma_1^2 (t-\tau)^2 - x_2^2} \quad . \quad . \quad (9).$$

(z sind natürlich zwei verschiedene Funktionen, je nachdem β positiv oder negativ ist; es ist jedoch bequemer, sie nicht gesondert ausschreiben zu müssen.) Wenn wir die z-Ebene entlang des Schnittes von $z = \frac{\beta}{|\beta|}(x_1 - a) - \sqrt{\sigma_1^2 (t-\tau)^2 - x_2^2}$ nach $z = \frac{\beta}{|\beta|}(x_1 - a) + \sqrt{\sigma_1^2 (t-\tau)^2 - x_2^2}$ aufschneiden und das z-Blatt betrachten, in dem für großes positives z die Wurzel in (9) positiv ist, so bildet dieses dann die Abbildung des Teils der ζ-Ebene, der außerhalb des gestrichelten Umrisses in Abb. 2 liegt. Dieser Umriß schneidet die reelle ζ-Achse in den Punkten $\pm \frac{\sigma_1 (t-\tau)}{\sqrt{\sigma_1^2 (t-\tau)^2 - x_2^2}}$ und umschließt somit vollständig alle Verzweigungspunkte $\left(\pm 1, \pm \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$ in den Integranden in (7a) und (7b). Der Umstand, daß entsprechende Verhältnisse in (7c) und (7d) nicht vorliegen, verursacht, wie wir unten finden werden, den wesentlichen Unterschied der Verbreitungsweise der langsamen und der raschen Wellen im Halbraume. Wir können nun Γ in der ζ-Ebene dem genannten Umriß folgen lassen und erhalten einen Integrationsweg Γ_1 in der z-Ebene entlang der reellen z-Achse auf der Unterseite des Schnittes. Bevor wir in (7a) die Reihenfolge vertauschen, trennen wir für β das Intervall $(-a, 0)$ bzw. $(0, +a)$ ab und ersetzen in ihnen den Exponentialausdruck durch denselben Ausdruck vermindert um die beiden ersten Glieder in seiner Potenzreihenentwicklung, welche Glieder laut

obigem ohne Einfluß sind, es aber ermöglichen, mit der Integration nach β zu beginnen; a ist eine willkürliche positive Zahl. Aus (8) ergibt sich:

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}=\frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)\right)^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}},$$

und wir erhalten damit aus (7a):

$$f_1=-\frac{i\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta'^2-1}\,I_1\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta'\right)\sqrt{(z+(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}$$
$$+\frac{i\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma'_1}\frac{2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta''^2-1}\,I_2\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta''\right)\sqrt{(z-(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}},$$

wo

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{-a}\frac{e^{-i\beta z}}{\beta^2}d\beta+\int\limits_{-a}^{0}\frac{e^{-i\beta z}-1+i\beta z}{\beta^2}d\beta;\quad I_2=\int\limits_{0}^{a}\frac{e^{i\beta z}-1-i\beta z}{\beta^2}d\beta+\int\limits_{a}^{\infty}\frac{e^{i\beta z}}{\beta^2}d\beta,$$

wo man ζ' und ζ'' aus (9) erhält, wenn man $\frac{\beta}{|\beta|}=-1$ bzw. $+1$ setzt. Die Integrationswege Γ'_1 und Γ''_1 in der z-Ebene nach Abb. 2 sind verschieden, da der Schnitt für das letztere Integral im Verhältnis zu dem des ersteren verschoben ist. Man findet nun sowohl für I_2 als auch für I_1:

$$I_2=I_1=\frac{1}{a}+iz\left(1+\frac{\pi i}{2}-0{,}5772\ldots-\log a\right)-iz\log z,$$

wo z reell ist und $\arg z=0$ für $z>0$ und $\arg z=\pi$ für $z<0$. Um nach der Integration in β einen analytisch zusammenhängenden Integrationsweg Γ'_1 zu erhalten, müssen wir somit den Nullpunkt ($z=0$) in der oberen Halbebene umgehen, und wenn der Nullpunkt auf dem Schnitt liegt, über diesen hinaus fortsetzen, so daß der Bogen um den Nullpunkt in dem sonst verbotenen z-Blatt liegt. Bei Ausführung der Integration in z ist nun nur das letzte Glied in I_2 und I_1 von Einfluß, und wir erhalten:

$$f_1=-\frac{\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{z\log z\cdot 2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta'^2-1}\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta'\right)\sqrt{(z+(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}$$
$$+\frac{\sigma_1}{4\pi\sigma_2}\int\limits_{\Gamma'_1}\frac{z\log z\cdot 2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta''^2-1}\,dz}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta''\right)\sqrt{(z-(x_1-a))^2+x_2^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}.$$

Der Integrationsweg Γ'_1 bzw. Γ''_1 kann nun in eine Doppellinie umgeändert werden, welche den Schnitt nicht trifft, in der unteren Halbebene unendlich entfernt vom Nullpunkt beginnt und diesen in negativem Sinne umläuft. Die Differenz zwischen den Werten von $\log z$ auf dem Hin- und dem Rückweg ist dann $2\pi i$. Wir führen ferner wieder die Veränderliche ζ ein. Mit unseren Wurzelzweigen erhalten wir in $z=0$ folgende Gleichungen: $\zeta'=\zeta_1$, $\zeta''=\zeta_1'$, wo für $r>\sigma_1(t-\tau)$ $\quad(r=\sqrt{(x_1-a)^2+x_2^2})$:

$$\zeta_1=\frac{\sigma_1(t-\tau)(x_1-a)+x_2\frac{x_1-a}{|x_1-a|}\sqrt{r^2-\sigma_1^2(t-\tau)^2}}{\sigma_1^2(t-\tau)^2-x_2^2}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(10\text{a}),$$

$$\zeta_1'=-\zeta_1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10\text{b}),$$

aber für $r < \sigma_1 (t - \tau)$:

$$\zeta_1 = \frac{\sigma_1 (t - \tau)(x_1 - a) - i\, x_2 \sqrt{\sigma_1^2 (t - \tau)^2 - r^2}}{\sigma_1^2 (t - \tau)^2 - x_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$$\zeta_1' = \frac{-\sigma_1 (t - \tau)(x_1 - a) - i\, x_2 \sqrt{\sigma_1^2 (t - \tau)^2 - r^2}}{\sigma_1^2 (t - \tau)^2 - x_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10c).$$

Hier nehmen wir die positive Wurzel. Bei Berücksichtigung von (8) erhalten wir dann:

$$\left.\begin{aligned} f_1 = & -\frac{i}{2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\int\limits_{(\infty)}^{\zeta_1} \frac{\zeta \sigma_1 (t - \tau) - x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} - (x_1 - a)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}\, D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)}\, 2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta^2 - 1}\, d\zeta \\ & + \frac{i}{2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\int\limits_{(\infty)}^{\zeta'_1} \frac{\zeta \sigma_1 (t - \tau) - x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} + (x_1 - a)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}\, D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)}\, 2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta^2 - 1}\, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wo sich die in Klammer gesetzte untere Grenze auf einen beliebigen Punkt auf einem unendlich entfernten Kreis bezieht und wo auch der Integrationsweg willkürlich ist, wenn nur der Schnitt in Abb. 2 nicht überschritten wird. Für großes ζ verhält sich der Integrand wesentlich wie $1 : \zeta^3$. Da ζ_1 und ζ'_1 gegenseitig Spiegelbilder in der imaginären ζ-Achse sind, können die beiden Integrale in (11) von der Unendlichkeit auf Wegen geführt werden, die ebenfalls gegenseitige Spiegelbilder in derselben Achse sind, und gleiches gilt auch von den in (11) eingehenden Wurzeln und von $d\zeta$, während ζ^2 und D in ihre konjugierten Ausdrücke übergehen, wenn man vom ersten zum zweiten Integral in (11) übergeht und entsprechende Punkte in der ζ-Ebene betrachtet. Wir finden somit den einfacheren Ausdruck:

$$f_1 = \Re e \left[-i\, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int\limits_{(\infty)}^{\zeta_1} \frac{\zeta \sigma_1 (t - \tau) - x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} - (x_1 - a)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}\, D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)} \cdot 2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta^2 - 1}\, d\zeta \right] \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

wo $\Re e$ den Realteil bezeichnet. Es sei hier betont, daß sich die Wurzelzeichen in (12) wie in (5) auf unser gewöhnliches Blatt mit reellem Schnitt $(-1, 1)$ beziehen, während sich die Wurzeln in (10, 10a, c) mit nur reellen r und t und τ, welche Wurzeln wir immer so anwenden wollen, daß sie reell sind, auf positive Wurzeln beziehen, ein System, an dem wir auch im weiteren konsequent festhalten.

Für $r > \sigma_1 (t - \tau)$ ist ζ_1 in (12) nach (10a) einzusetzen, welcher reelle Punkt aber außerhalb des Schnittes $(-1, 1)$ liegt, was leicht direkt gezeigt werden kann, sich aber am einfachsten aus (9) ergibt: $z = 0$ außerhalb des Schnittes in der z-Ebene in Abb. 2, und dann gilt gleiches für ζ. Der Integrationsweg in (12) kann dann eine passende Hälfte der reellen Achse sein, wo der Integrand auf dem ganzen Wege reell ist. Es ist somit $f_1 = 0$ für $r > \sigma_1 (t - \tau)$.

Hinsichtlich f_2 nach (7b) ist offenbar, daß man bei gleicher Behandlung einen mit (11) gleichen Ausdruck erhält, nur mit dem Unterschied, daß zufolge des Fehlens des Faktors $\frac{\beta}{|\beta|}$ in (7b) die beiden (11) entsprechenden Glieder positives Vorzeichen erhalten, während der letzte Faktor in den Integralen jetzt $2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta^2$ wird, welcher Ausdruck in beiden Integralen in entsprechenden Punkten konjugierte Werte annimmt. Diese beiden Unterschiede heben sich gegenseitig auf, und wir dürfen, wie oben, die Summe der beiden Integralglieder durch den zweifachen reellen Teil des ersten ersetzen und finden somit:

$$f_2 = \Re e \left[i\, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int\limits_{(\infty)}^{\zeta_1} \frac{\zeta \sigma_1 (t - \tau) - x_2 \sqrt{\zeta^2 - 1} - (x_1 - a)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}\, D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)} \left(2 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta^2\right) d\zeta \right] \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Damit ist Φ nach (6a) berechnet, wenn wir den Integrationsbereich für τ noch weiter begrenzen von früher 0 bis $t-\frac{x_2}{\sigma_1}$ auf jetzt 0 bis $t-\frac{r}{\sigma_1}$.

Zur Berechnung von g_1 nach (7c) müssen wir hingegen setzen:

$$z=\zeta\sigma_2(t-\tau)-x_2\sqrt{\zeta^2-1}+\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a) \quad \ldots \quad (14),$$

woraus sich ergibt:

$$\zeta=\frac{\sigma_2(t-\tau)\left(z-\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)\right)+x_2\sqrt{\left(z-\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)\right)^2+x_2^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2} \quad \ldots \quad (15)$$

entsprechend (8) und (9). Einem längs des reellen Schnittes $z=\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)-\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}$ nach $z=\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)+\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}$ aufgeschnittenem z entspricht ein ζ außerhalb des Umrisses in Abb. 3. Der Umriß schneidet die reelle ζ-Achse in $\pm\frac{\sigma_2(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}}$, während die

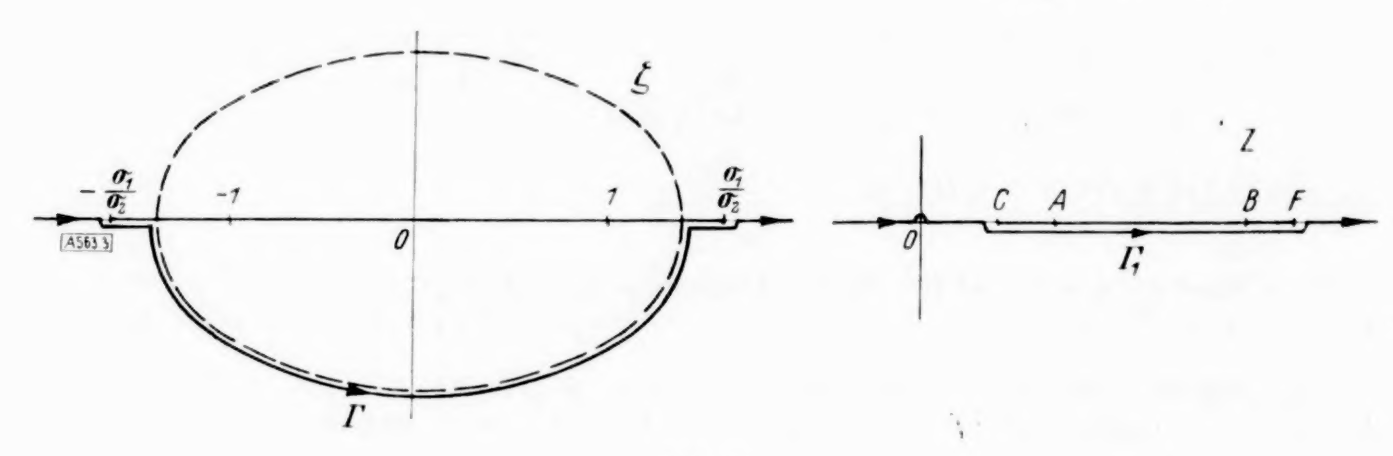


Abb. 3.

Verzweigungsstellen für den Integrand in g_1 nach (7c) und (5) ± 1, $\pm\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ sind, von denen die ersteren innerhalb des Umrisses liegen, die letzteren jedoch entweder innerhalb oder außerhalb. Sie liegen innerhalb, wenn $\frac{\sigma_2(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}}>\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ ist, d. h. wenn $x_2>\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}(t-\tau)$ ist. In diesem Falle gestalten sich die Verhältnisse vollständig analog denen, die bei Φ vorlagen, und man erhält aus (7c): $g_1=g_1(\zeta_2)$, wo

$$\zeta_2=\frac{\sigma_2(t-\tau)(x_1-a)-i\,x_2\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-r^2}}{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2} \quad \ldots \quad (16),$$

$$g_1(\zeta_2)=\Re e\left[i\int\limits_{(\infty)}^{\zeta_2}\frac{\zeta\sigma_2(t-\tau)-x_2\sqrt{\zeta^2-1}-(x_1-a)}{\sqrt{\zeta^2-1}\,D(\zeta)}(2-\zeta^2)\,d\zeta\right] \quad \ldots \quad (17)$$

und $g_1=0$ für $r>\sigma_2(t-\tau)$, was alles gilt für

$$x_2>\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}(t-\tau).$$

Wenn hingegen $x_2<\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}(t-\tau)$ ist, entsprechen den Punkten $\zeta=\pm\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ z-Punkte C, F, die in unserem z-Blatt liegen, und zwar nach (14):

$$z=\frac{\beta}{|\beta|}(x_1-a)\pm\left(\sigma_1(t-\tau)-x_2\frac{\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}{\sigma_2}\right)$$

auf der reellen z-Achse außerhalb des früheren Schnittes, d. h. außerhalb AB in Abb. 3. Um die Integranden in (7c) als Funktionen von z anzugeben, müssen wir den Schnitt nach C und F verlängern. Der Nullpunkt $z=0$ liegt auf dem Schnitt CF, wenn $|x_1-a|+\frac{x_2}{\sigma_2}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}<\sigma_1(t-\tau)$ ist. Da sich die Ausrechnung des Integrals (7c) im übrigen nicht

ändert, findet man somit, daß für $x_2 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\,(t-\tau)$ $g_1 = g_1(\zeta'_2)$ ist, wo g_1 dieselbe Funktion wie in (17) ist, wo aber (in Analogie mit (10a, 10)):

$$\zeta'_2 = \zeta_2, \qquad \text{wenn } r < \sigma_2(t-\tau),$$

$$\zeta'_2 = \zeta_3, \qquad \text{wenn } \sigma_2(t-\tau) < r \quad \text{und} \quad |x_1-a| + \frac{x_2}{\sigma_2}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2} < \sigma_1(t-\tau),$$

$$\zeta_3 = \frac{\sigma_2(t-\tau)(x_1-a) + x_2\frac{x_1-a}{|x_1-a|}\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}{\sigma_2^2(t-\tau)^2 - x_2^2} \quad \ldots \ldots \quad (18),$$

und für $|x_1-a| + \frac{x_2}{\sigma_2}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2} > \sigma_1(t-\tau)$ verschwindet $g_1(\zeta'_2)$.

In derselben Weise erhält man:

Für $x_2 > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\,(t-\tau)$ ist $g_2 = g_2(\zeta_2)$, wo

$$g_2(\zeta_2) = \Re\left[i\int\limits_{(\infty)}^{\zeta_2} \frac{\zeta\sigma_2(t-\tau) - x_2\sqrt{\zeta^2-1} - (x_1-a)}{\sqrt{\zeta^2-1}\,D(\zeta)}\, 2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta^2-1}\, d\zeta\right] \quad \ldots \quad (19)$$

und $g_2(\zeta_2) = 0$ für $r > \sigma_2(t-\tau)$;

für $x_2 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\,(t-\tau)$ ist hingegen $g_2 = g_2(\zeta'_2)$

und $g_2(\zeta'_2) = 0$ für $|x_1-a| + \frac{x_2}{\sigma_2}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2} > \sigma_1(t-\tau)$.

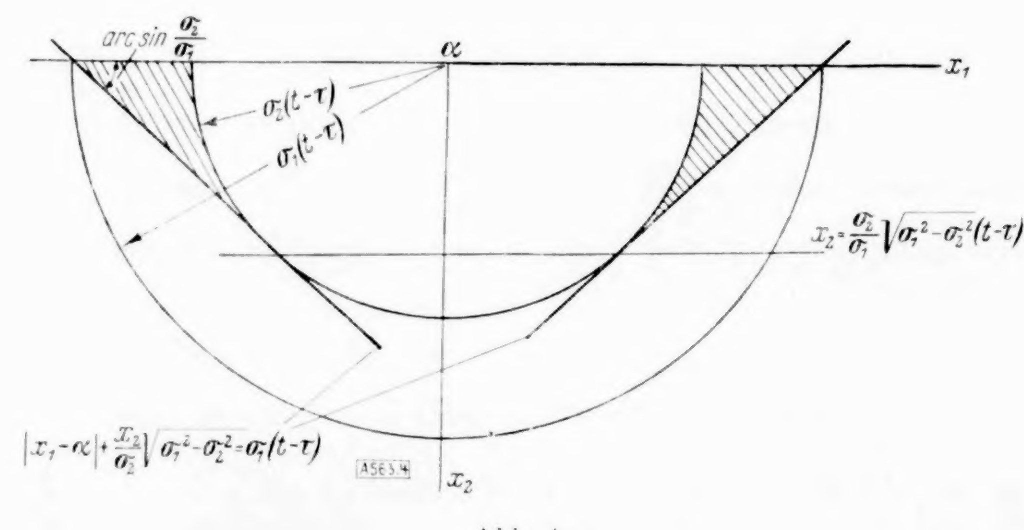


Abb. 4.

Das Ergebnis, zu dem wir gelangt sind, beschreibt die Verbreitungsweise des Potentials A in folgender Weise (Abb. 4): Wenn man in der x_1x_2-Ebene mit dem Punkte $(a, 0)$ als Mittelpunkt zwei Halbkreise mit den Radien $\sigma_1(t-\tau)$ bzw. $\sigma_2(t-\tau)$ zeichnet, stellen diese das Gebiet dar, zu dem die Wellenfronten im Zeitpunkt t von einem Impuls in $(a, 0)$ im Zeitpunkt τ gelangt wären, wenn das Medium ein Ganzraum gewesen wäre. Wenn man vom Schnittpunkt des äußeren Kreises mit der x_1-Achse Tangenten an den inneren Kreis zieht, besitzen diese die Gleichung $|x_1-a| + \frac{x_2}{\sigma_2}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2} = \sigma_1(1-\tau)$ und der Berührungspunkt besitzt den Abstand $x_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\,(t-\tau)$ von der Oberfläche. In der mittleren Partie in das Medium hinein wird die Wellenfront der langsamen Welle von demselben Zylinder gebildet, wie im Falle des Ganzraums, an den Seiten liegt aber die Wellenfront der Tangenten. Der Impuls hat sich hier an der Oberfläche entlang mit der größeren Geschwindigkeit σ_1 fortgepflanzt (getragen von Φ, das ja an der Oberfläche mit A verknüpft ist) und von den Punkten der Oberfläche als Transversalwelle mit der Geschwindigkeit σ_2.

Der Übersichtlichkeit halber trennen wir das in Abb. 4 gestrichelte Gebiet ab. Dort ist teils $r > \sigma_2(t-\tau)$, teils $x_2 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\,(t-\tau)$. Dies ist erfüllbar in dem Teil Ω' von Ω, wo $x_2 < \frac{r}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}$, d. h., wo $|x_1-a| > x_2\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}$, d. h. $|x_1-a| > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}r$. In dem betreffenden Bereich ist dann $t-\frac{r}{\sigma_2} < \tau < t-t_0$, wo $t_0 = \frac{|x_1-a|}{\sigma_1} + x_2\frac{\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}$ ist und $t_0 = \frac{r}{\sigma_2}$ nur auf der obenerwähnten Begrenzung von Ω'. Wir erhalten dann die Werte der Verschiebungspotentiale in Gestalt folgender Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{\Omega} da \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_1}} \{f_1(\zeta_1)\,S_{12}(a\tau) + f_2(\zeta_1)\,S_{22}(a\tau)\}\,d\tau\,, \\
A &= \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{\Omega} da \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_2}} \{g_1(\zeta_2)\,S_{12}(a\tau) + g_2(\zeta_2)\,S_{22}(a\tau)\}\,d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{\Omega'} da \int\limits_{t-\frac{r}{\sigma_2}}^{t-t_0} \{g_1(\zeta_3)\,S_{12}(a\tau) + g_2(\zeta_3)\,S_{22}(a\tau)\}\,d\tau
\end{aligned}\right\} \quad . \;.\;.\;.\; (20).$$

Die Funktionen f_1, f_2, g_1, g_2 bedeuten hier (12, 13, 17, 19), und der in ihnen eingesetzte Wert $\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3$ bezieht sich auf die obere Integrationsgrenze. Diese $\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3$ sind durch (10, 16, 18) gegeben.

Wir gehen nun zur Untersuchung des Ausdrucks (20) über. Wir bemerken zunächst, daß entsprechend den obigen Auseinandersetzungen sämtliche Integranden in (20) auf den Integrationsgrenzen für τ und a verschwinden müssen. (Wir rechnen hier nicht mit der gemeinsamen oberen und unteren Grenze $t-\frac{r}{\sigma_2}$, die für den Teilbereich Ω' im ersten und zweiten Glied von A vorkommt; für $\tau = t-\frac{r}{\sigma_2}$ ist ja nach (16, 18) $\zeta_2 = \zeta_3$.) Für die Grenze von Ω' fallen die Integrationsgrenzen von τ zusammen. Bezüglich f_1, f_2, g_1, g_2 verhalten sich die Integranden in (12, 13, 17, 19) nach (5) für große ζ wesentlich entweder wie $\frac{1}{\zeta^3}$ oder wie $\frac{1}{\zeta^2}$. Die Ausdrücke können deshalb nur unendlich werden, wenn ζ_1 bzw. ζ_2 und ζ_3 Nullstellen von $D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)$ bzw. $D(\zeta)$ sind. Da diese reell sind und auf dem inneren Schnitt in der ζ-Ebene liegen, ist dafür nach (10, 16, 18) erforderlich, daß $x_2 = 0$ ist, da ja die andere Möglichkeit $r = \sigma_1(t-\tau)$ bzw. $r = \sigma_2(t-\tau)$ zur Folge haben würde $|\zeta_1| = \frac{r}{|x_1-a|} > 1$; $|\zeta_2| = |\zeta_3| = \frac{r}{|x_1-a|} > 1$. Ferner sind in (12, 13, 17, 19) die oberen Grenzen $\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3$ Nullstellen des Integranden nach (8, 14). Bei einer ersten Ableitung der Integrale in (20) in bezug auf x_1, x_2 oder t liefern keine Integrationsgrenzen Beiträge, bei einer zweiten nur die oberen Grenzen $\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3$. Aus (10, 16, 18) hat man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_1} = i\frac{\sqrt{\zeta_j^2-1}}{\sqrt{\sigma_j^2(t-\tau)^2-r^2}}\,; \quad \frac{\partial\zeta_j}{\partial x_2} = i\frac{\zeta_j^2-1}{\sqrt{\sigma_j^2(t-\tau)^2-r^2}}\,; \quad \frac{\partial\zeta_j}{\partial t} = -i\frac{\sigma_j\zeta_j\sqrt{\zeta_j^2-1}}{\sqrt{\sigma_j^2(t-\tau)^2-r^2}}\,;\; j=1,2 \\
&\frac{\partial\zeta_3}{\partial x_1} = \frac{\frac{x_1-a}{|x_1-a|}\sqrt{\zeta_3^2-1}}{\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}\,; \quad \frac{\partial\zeta_3}{\partial x_2} = \frac{\frac{x_1-a}{|x_1-a|}(\zeta_3^2-1)}{\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}\,; \quad \frac{\partial\zeta_3}{\partial t} = -\frac{\frac{x_1-a}{|x_1-a|}\sigma_2\zeta_3\sqrt{\zeta_3^2-1}}{\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}
\end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Aus obigem ergibt sich, daß die Integrale (20) in jedem inneren Punkt $(x_2 > 0)$ zweimal nach x_1, x_2 oder t differenziert werden dürfen. Aus (1, 20, 12, 13, 17, 19, 21) erhält man den endgültigen Ausdruck für die Verschiebung des Mediums in jedem inneren Punkt desselben:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 = {} & \frac{1}{\pi\,\varrho\,\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\,a \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_1}} \Re\, \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{\zeta_1^2-1}\left[-2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2-1}\,S_{12}(a\,\tau)+\left(2-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2\right)S_{22}(a\,\tau)\right]}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta_1\right)\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\,\tau \\ & + \frac{1}{\pi\,\varrho\,\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\,a \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_2}} \Re\, \frac{[\zeta_2^2-1]\left[(2-\zeta_2^2)\,S_{12}(a\,\tau)+2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2-1}\,S_{22}(a\,\tau)\right]}{D(\zeta_2)\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\,\tau \\ & + \frac{1}{\pi\,\varrho\,\sigma_2}\int\limits_{\Omega'} d\,a \int\limits_{t-\frac{r}{\sigma_2}}^{t-t_0} \Re\, \frac{-i\frac{x_1-a}{|x_1-a|}[\zeta_3^2-1]\left[(2-\zeta_3^2)\,S_{12}(a\,\tau)+2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_3^2-1}\,S_{22}(a\,\tau)\right]}{D(\zeta_3)\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}\,d\,\tau\end{aligned}\right\} \quad (22\text{a}),$$

$$\left.\begin{aligned}\xi_2 = {} & \frac{1}{\pi\,\varrho\,\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\,a \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_1}} \Re\, \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}[\zeta_1^2-1]\left[-2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2-1}\,S_{12}(a\,\tau)+\left(2-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2\right)S_{22}(a\,\tau)\right]}{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta_1\right)\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\,\tau \\ & + \frac{1}{\pi\,\varrho\,\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\,a \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_2}} \Re\, \frac{-\sqrt{\zeta_2^2-1}\left[(2-\zeta_2^2)\,S_{12}(a\,\tau)+2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2-1}\,S_{22}(a\,\tau)\right]}{D(\zeta_2)\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\,\tau \\ & + \frac{1}{\pi\,\varrho\,\sigma_2}\int\limits_{\Omega'} d\,a \int\limits_{t-\frac{r}{\sigma_2}}^{t-t_0} \Re\, \frac{i\frac{x_1-a}{|x_1-a|}\sqrt{\zeta_3^2-1}\left[(2-\zeta_3^2)\,S_{12}(a\,\tau)+2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_3^2-1}\,S_{22}(a\,\tau)\right]}{D(\zeta_3)\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}\,d\,\tau\end{aligned}\right\} \quad (22\text{b}),$$

wo Ω' der Teil des Bereichs Ω der Spannungen ist, wo $|x_1-a| > \frac{\sigma_2}{\sigma_1} r$ ist, und

$$D(\zeta) = (2-\zeta^2)^2 + 4\sqrt{(\zeta^2-1)\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta^2-1\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$\zeta_1 = \frac{\sigma_1(t-\tau)(x_1-a) - i\,x_2\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-r^2}}{\sigma_1^2(t-\tau)^2-x_2^2} \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

$$\zeta_2 = \frac{\sigma_2(t-\tau)(x_1-a) - i\,x_2\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-r^2}}{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2} \quad \ldots\ldots \quad (16),$$

$$\zeta_3 = \frac{\sigma_2(t-\tau)(x_1-a) + x_2\frac{x_1-a}{|x_1-a|}\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2} \quad \ldots\ldots \quad (18),$$

$$t_0 = \frac{|x_1-a|}{\sigma_1} + x_2\frac{\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}{\sigma_1\,\sigma_2}.$$

In (10, 16, 18) sind die Wurzeln positiv, in (5, 22a, b) beziehen sie sich auf den für großes positives $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ positiven Zweig, wenn der Schnitt $-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ nach $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ nicht überschritten worden ist.

Die für die Schwingungsausbreitung in dem gesamten elastischen Halbraum gültige Formel (22a, b) ist zwar verwickelt, kann aber mit Rücksicht auf den allgemeinen Charakter des Problems nicht als allzu kompliziert aufgefaßt werden. Es ist ja zu erwarten, daß die freie Oberfläche, welche eine Wechselwirkung zwischen den beiden Wellensystemen, dem transversalen und dem longitudinalen, verursacht, die Verhältnisse im Vergleich zu denen im homogenen Ganzraum kompliziert. Der wohl auffälligste Umstand, der für das Innere des Mediums von der freien Oberfläche verursacht wird, ist das Vorhandensein des geraden Teils der Wellenfront (Abb. 4). Er kann als Gegenstück der Erscheinung der Doppelbrechung in der Optik aufgefaßt werden. Hinsichtlich der Erde sind entsprechende Wellenfronten (in diesem Falle natürlicherweise keine geraden Wellenfronten) in der Seismologie unter den Präliminärwellen bekannt[6]).

§ 2. Prüfung der Lösung. Obwohl wir deduktiv vorgegangen sind und es ohne weiteres zu erwarten ist, daß unsere konvergenten Integralausdrücke tatsächliche Lösungen sind, ist zu berücksichtigen, daß wir uns der formalen Fourierlösung (4) bedienten, deren Berechtigung sich auf die Annahme stützt, daß erforderliche Differentiationen unter dem Integralzeichen ausgeführt werden dürfen und daß die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf. Wir prüfen also die Ergebnisse und benützen dabei (20), welche Gleichung dabei ihre eigentliche Anwendung erhält. Wenn wir in (20) $\frac{\partial}{\partial x_2}$ weglassen und somit setzen $\Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}$, $A = \frac{\partial B}{\partial x_2}$, können an Ψ und B, wie wir wissen, die Operationen $\Delta - \frac{1}{\sigma_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ bzw. $\Delta - \frac{1}{\sigma_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ unmittelbar ausgeführt werden, und mit (21) bestätigt man unmittelbar, daß für jeden inneren Punkt $(x_2 > 0)$ $\Delta \Psi - \frac{1}{\sigma_1^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$; $\Delta B - \frac{1}{\sigma_2^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$ ist. Die Differentialgleichungen (2a, b) sind befriedigt.

Zwecks Prüfung der Randbedingungen (3a, b) setzen wir statt (20):

$$\Phi = \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{\Omega} d\alpha \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_1}} \{F_1(\zeta_1)\, S_{12}(\alpha\tau) + F_2(\zeta_1)\, S_{22}(\alpha\tau)\}\, d\tau \qquad (23\text{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} A = {} & \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{\Omega} d\alpha \int\limits_0^{t-\frac{r}{\sigma_2}} \{G_1(\zeta_2)\, S_{12}(\alpha\tau) + G_2(\zeta_2)\, S_{22}(\alpha\tau)\}\, d\tau \\ & + \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{\Omega'} d\alpha \int\limits_{t-\frac{r}{\sigma_2}}^{t-t_0} \{G_1(\zeta_3)\, S_{12}(\alpha\tau) + G_2(\zeta_3)\, S_{22}(\alpha\tau)\}\, d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{b}),$$

wo

$$F_1(\zeta_1) = \Re\mathrm{e}\left[-\frac{i}{\sigma_2}\int\limits_{(\infty)}^{\zeta_1} \frac{\frac{1}{2}\,[\zeta\sigma_1(t-\tau) - x_2\sqrt{\zeta^2-1} - (x_1-\alpha)]^2}{\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\; D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta\right)}\, 2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta^2 - 1}\, d\zeta\right]$$

und entsprechende Formeln für F_2, G_1 und G_2 durch Herleitung in derselben Weise aus f_2 bzw. g_1 und g_2. Wenn nämlich die Differentiation nach t ausgeführt wird, tragen die Integrationsgrenzen nichts bei. Die neuen Ausdrücke (23a, b) gestatten für $x_2 > 0$, daß drei Differentiationszeichen unter das Integralzeichen übergeführt werden. Wir bilden aus (23a, b) für einen inneren Punkt den Spannungsausdruck

$$S_1 = \varrho\sigma_2^2\left(2\frac{\partial_2\Phi}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}\right) \qquad (24),$$

wobei die drei räumlichen Differentiationen unter das Integrationszeichen gestellt werden und nur die Ableitung nach der Zeit außerhalb stehen bleibt. Wenn wir außerdem die Integrationsreihenfolge zwischen α und τ vertauschen, erhalten wir:

[6]) H. Labrouste: Mémorial des sciences physiques, Paris 1934, XXVI, S. 12: „Autres phases préliminaires".

$$S_1=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{x_2}{\sigma_1}} d\tau \int\limits_{x_1-\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-x_2^2}} 2\,\Re\,\frac{[\zeta_1^2-1]\left[2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2-1}\,S_{12}-\left(2-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2\right)S_{22}\right]}{\zeta_1 D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta_1\right)\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{x_2}{\sigma_2}} d\tau \int\limits_{x_1-\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}}^{x_1+\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}} \Re\,\frac{\sqrt{\zeta_2^2-1}\left[(2-\zeta_2^2)^2 S_{12}+(2-\zeta_2^2)\,2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2-1}\,S_{22}\right]}{\zeta_2 D(\zeta_2)\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{\sigma_1 x_2}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}} d\tau\left(\int\limits_{\alpha_{01}}^{\alpha_{02}}+\int\limits_{\alpha_{03}}^{\alpha_{04}}\Re\,\frac{-i\frac{x_1-\alpha}{|x_1-\alpha|}\sqrt{\zeta_3^2-1}\left[(2-\zeta_3^2)^2 S_{12}+(2-\zeta_3^2)\,2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_3^2-1}\,S_{22}\right]}{\zeta_3 D(\zeta_3)\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}\,d\alpha\right),$$

wo $\alpha_{01}=x_1+\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}$; $\alpha_{02}=x_1+\sigma_1(t-\tau)-x_2\frac{\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}{\sigma_2}$;

$\alpha_{03}=x_1-\sigma_1(t-\tau)+x_2\frac{\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}{\sigma_2}$; $\alpha_{04}=x_1-\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}$.

Hier führen wir nun statt α als Integrationsveränderliche ζ_1 bzw. ζ_2 und ζ_3 ein. Da $\frac{\partial\zeta_j}{\partial\alpha}=-\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_1}$ ist, erhalten wir mit Hilfe von (21):

$$S_1=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{x_2}{\sigma_1}} d\tau\,\Re\int\limits_{\Gamma_1} i\,\frac{4\sqrt{\zeta_1^2-1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2-1}\,S_{12}(\alpha_1\tau)-2\left(2-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2\right)\sqrt{\zeta_1^2-1}\,S_{22}(\alpha_1\tau)}{\zeta_1 D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta_1\right)}\,d\zeta_1$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{x_2}{\sigma_2}} d\tau\,\Re\int\limits_{\Gamma_2} i\,\frac{(2-\zeta^2)^2 S_{12}(\alpha_2\tau)+(2-\zeta^2)\,2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta^2-1}\,S_{22}(\alpha_2\tau)}{\zeta D(\zeta)}\,d\zeta$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{\sigma_1 x_2}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}} d\tau\,\Re\int\limits_{\Gamma_3} i\,\frac{(2-\zeta^2)^2 S_{12}(\alpha_2\tau)+(2-\zeta^2)\,2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta^2-1}\,S_{22}(\alpha_2\tau)}{\zeta D(\zeta)}\,d\zeta,$$

wo:

$$\alpha_1=x_1-\zeta_1\sigma_1(t-\tau)+x_2\sqrt{\zeta_1^2-1},\qquad \alpha_2=x_1-\zeta\sigma_2(t-\tau)+x_2\sqrt{\zeta^2-1},$$

vgl. (8, 14), und wo Γ_1, Γ_2 und Γ_3 komplexe Integrationswege in der unteren Halbebene sind, denen entlang α_1 und α_2 reell sind.

Γ_1 muß von $\frac{\sigma_1(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-x_2^2}}$ nach $-\frac{\sigma_1(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-x_2^2}}$ gehen,

Γ_2 von $\frac{\sigma_2(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}}$ nach $-\frac{\sigma_2(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}}$ und

Γ_3 von $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ nach $\frac{\sigma_2(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}}$,

sowie von $-\frac{\sigma_2(t-\tau)}{\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-x_2^2}}$ nach $-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

In dem ersten der drei Integrale setzen wir nun $\zeta_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\zeta$ ein und erhalten

$$a_1 = x_1 - \zeta\,\sigma_2\,(t-\tau) + x_2\sqrt{\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\zeta^2 - 1}$$

sowie einen neuen Integrationsweg

$$\Gamma_1' \qquad \text{von } \frac{\sigma_1^{\,2}\,(t-\tau)}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^{\,2}\,(t-\tau)^2 - x_2^{\,2}}} \text{ nach } -\frac{\sigma_1^{\,2}\,(t-\tau)}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^{\,2}\,(t-\tau)^2 - x_2^{\,2}}}.$$

Man erhält:

$$\int\limits_{\Gamma_1} = \int\limits_{\Gamma_1'} i\,\frac{4\sqrt{\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\zeta^2 - 1}\,\sqrt{\zeta^2-1}\,S_{12}\,(a_1\,\tau) - (2-\zeta^2)\,2\sqrt{\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\zeta^2 - 1}\,S_{22}(a_1\,\tau)}{\zeta\,D\,(\zeta)}\,d\,\zeta\,.$$

Wir machen nun einen Grenzübergang nach $x_2 = 0$ und drücken S_1 durch einen Prinzipalteil und einen Beitrag von den Polen des Integranden aus. Der erstere wird bei Vereinigung der beiden letzteren Integrale miteinander und dem ersten:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t d\,\tau\,\Re\!\!\int\limits_{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}^{-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} i\,\frac{\left[4\sqrt{\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\zeta^2 - 1}\,\sqrt{\zeta^2-1} + (2-\zeta^2)^2\right]S_{12}}{\zeta\,D\,(\zeta)}\,d\,\zeta\,,$$

wo in S_{12}: $a = x_1 - \zeta\,\sigma_2\,(t-\tau)$ ist. Auf Grund von (5) wird D weggehoben und das Integral verschwindet.

Die Umgebung der einfachen Nullstellen $\pm\,\varkappa$ von $D\,(\zeta)$ gibt nun keine besonderen Beiträge, da hier auch die Zähler verschwinden. Es verbleibt dann nur noch die Umgebung des Punktes $\zeta = 0$, in dem sich der Nenner wie ζ^3 verhält. Man hat

$$a_1 - a_2 = -\,i\,x_2\left(\sqrt{1-\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\zeta^2} - \sqrt{1-\zeta^2}\right) = -\,i\,x_2\,\frac{\zeta^2}{2}\left(1-\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\right) + \varepsilon\,,$$

wo $\lim\limits_{\zeta=0}\frac{\varepsilon}{\zeta^3} = 0$ ist. Wenn wir in bezug auf die Lagekoordinate a eine gewisse Differenzierbarkeit voraussetzen, erhalten wir dann für kleine ζ: $S_{12}\,(a_2\,\tau) = S_{12}\,(a_1\,\tau) + i\,x_2\,\frac{\zeta^2}{2}\left(1-\frac{\sigma_2^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\right)\frac{\partial S_{12}}{\partial a}$ und entsprechendes für S_{22}. Das Differenzglied $\frac{\partial S_{12}}{\partial a}$ gibt dann zwar bei Integration am Nullpunkt vorbei ein endliches „Halb-Residuum“, das Glied wird aber durch den Faktor x_2 vernichtet. Da nun auch die S_{22}-Glieder vollständig verschwinden, erhalten wir somit:

$$\lim_{x_2=0} S_1 = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t d\,\tau\,\Re\int\limits_{\smile} i\,\frac{S_{12}\,(x_1\,\tau)}{\zeta}\,d\,\zeta = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t d\,\tau\,S_{12}\cdot i\,(-\,i\,\pi) = S_{12}\,(x_1\,t)\,.$$

Auf Grund von (24) ist dann die Randbedingung (3a) erfüllt.

Wir bilden auch den Spannungsausdruck:

$$S_2 = \varrho\left(\sigma_1^{\,2}\,\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,x_2^{\,2}} + (\sigma_1^{\,2} - 2\,\sigma_2^{\,2})\,\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,x_1^{\,2}} - 2\,\sigma_2^{\,2}\,\frac{\partial^2\,A}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

und erhalten daraus und aus (23a, b) für einen inneren Punkt:

$$S_2 = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{x_2}{\sigma_1}} d\tau \int \Re \frac{\sqrt{\zeta_1^2-1}\left[\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2-2\right)2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2-1}\,S_{12}+\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\zeta_1^2-2\right)^2 S_{22}\right]}{\zeta_1 D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\zeta_1\right)\sqrt{\sigma_1^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{x_2}{\sigma_2}} d\tau \int \Re \frac{2[\zeta_2^2-1]\left[(2-\zeta_2^2)S_{12}+2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2-1}\,S_{22}\right]}{\zeta_2 D(\zeta_2)\sqrt{\sigma_2^2(t-\tau)^2-r^2}}\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\frac{\sigma_1 x_2}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_2^2}}} d\tau \int \Re \frac{-i\frac{x_1-\alpha}{|x_1-\alpha|}2[\zeta_3^2-1]\left[(2-\zeta_3^2)S_{12}+2\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_3^2-1}\,S_{22}\right]}{\zeta_3 D(\zeta_3)\sqrt{r^2-\sigma_2^2(t-\tau)^2}}\,d\alpha,$$

wo die nicht ausgeschriebenen Integrationsgrenzen für α in den verschiedenen Gliedern dieselben wie in den entsprechenden Gliedern von S_1 sind. Man findet nun identisch wie oben: $\lim\limits_{x_2=0} S_2 = S_{22}(x_1\,t)$. Auf Grund von (25) ist dann die Randbedingung (3b) erfüllt. Da nach (20) und entsprechend den obigen Ausführungen über die Differenzierbarkeit Φ, A, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\frac{\partial A}{\partial t}$ insgesamt für den Zeitpunkt $t=0$ gleich Null sind, gilt gleiches vom Lagevektor ξ. Somit ist (22a, b) die gesuchte Lösung.

§ 3. Schwingungen in der Oberfläche. Die Gl. (22a, b) können auch bei Beachtung einer gewissen Vorsicht für die Oberfläche angewandt werden. Man hat nur beim Grenzübergang nach $x_2=0$ nicht nur auf die Prinzipalwerte, sondern auch wie in § 2 auf „Halb-Residuums"-Beiträge von den Polen des Integrands Rücksicht zu nehmen. Bei Berechnung der ersteren haben wir nach (10, 16, 18):

$$\zeta_2=\zeta_3=\frac{x_1-\alpha}{\sigma_2(t-\tau)}; \qquad \zeta_1=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\zeta_2,$$

mit welchen Werten wir einen ersten Teil ξ^{I} von ξ erhalten, den wir in folgende Form schreiben, wobei wir die Glieder auf zwei Integrationsbereiche gruppieren entsprechend dem zweiten und dritten Glied in (22a):

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\alpha\,\mathfrak{P}\int\limits_0^{t-\frac{|x_1-\alpha|}{\sigma_2}} \frac{\zeta_2^2\sqrt{1-\zeta_2^2}\,S_{12}(\alpha\tau)}{\sigma_2(t-\tau)D_1(\zeta_2)}\,d\tau + \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\alpha \int\limits_{t-\frac{|x_1-\alpha|}{\sigma_2}}^{t-\frac{|x_1-\alpha|}{\sigma_1}} \\
&\Re\frac{i\frac{x_1-\alpha}{|x_1-\alpha|}\zeta_2^2\sqrt{\zeta_2^2-1}\,S_{12}(\alpha\tau)-\left[i(2-\zeta_2^2)+2\frac{x_1-\alpha}{|x_1-\alpha|}\sqrt{(\zeta_2^2-1)\left(1-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2\right)}\right]S_{22}(\alpha\tau)}{\sigma_2(t-\tau)D_2(\zeta_2)}\,d\tau \\
\xi_2^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\alpha\,\mathfrak{P}\int\limits_0^{t-\frac{|x_1-\alpha|}{\sigma_2}} \frac{\zeta_2^2\sqrt{1-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2}\,S_{22}(\alpha\tau)}{\sigma_2(t-\tau)D_1(\zeta_2)}\,d\tau + \frac{1}{\pi\varrho\sigma_2}\int\limits_{\Omega} d\alpha \int\limits_{t-\frac{|x_1-\alpha|}{\sigma_2}}^{t-\frac{|x_1-\alpha|}{\sigma_1}} \\
&\Re\frac{\left[2\frac{x_1-\alpha}{|x_1-\alpha|}\sqrt{(\zeta_2^2-1)\left(1-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2\right)}+i(2-\zeta_2^2)\right]S_{12}(\alpha\tau)+\zeta_2^2\sqrt{1-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2}\,S_{22}(\alpha\tau)}{\sigma_2(t-\tau)D_2(\zeta_2)}\,d\tau
\end{aligned}\right\} \quad (26).$$

Hier ist ζ_2 nur eine Abkürzung für $\frac{x_1 - a}{\sigma_2 (t - \tau)}$, und alle Wurzeln beziehen sich auf positive Werte wie auch in

$$D_1(\zeta_2) = (2 - \zeta_2^2)^2 - 4 \sqrt{(1 - \zeta_2^2)\left(1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2\right)},$$

$$D_2(\zeta_2) = (2 - \zeta_2^2)^2 - 4 i \frac{x_1 - a}{|x_1 - a|} \sqrt{(\zeta_2^2 - 1)\left(1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta_2^2\right)}.$$

$\mathfrak{P}$ bezeichnet den Prinzipalwert (Hauptwert von Cauchy).

An diese Glieder ξ_1^{I} und ξ_2^{I} sind nun gewisse „Halb-Residuums"-Beiträge ξ_1^{II} und ξ_2^{II} von den Polen des Integrands anzufügen. Nach demselben Verfahren wie in § 2 findet man, daß (obwohl der Nenner sich wie ζ^2 verhält) vom Punkte $\zeta_2 = 0$ kein Beitrag kommt, sondern nur von den Einzelpolen $\zeta = \pm \varkappa$. Man erhält:

$$\xi_1^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\pi \varrho \sigma_2} \int_0^t d\tau \, \Re \int_{\smile} \frac{i \left[-\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - 1}\, S_{12} + \left(2 - \zeta^2 + \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\zeta^2 - 1}\right) S_{22} \right]}{D(\zeta)} d\zeta,$$

wo die Integration in ζ in negativem Sinne an unendlich kleinen Halbkreisen um die Punkte $\zeta = \pm \varkappa$ entlang auszuführen ist. Da

$$D'(\varkappa) = -D'(-\varkappa), \qquad \text{wo} \qquad D'(\zeta) = \frac{dD}{d\zeta},$$

erhält man

$$\xi_1^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\varrho \sigma_2} \frac{2 - \varkappa^2 - \sqrt{(1 - \varkappa^2)\left(1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\varkappa^2\right)}}{D'(\varkappa)} \int_0^t [S_{22}(x_1 - \varkappa \sigma_2 (t - \tau), \tau) - S_{22}(x_1 + \varkappa \sigma_2 (t - \tau), \tau)] \, d\tau.$$

Wenn wir statt τ als Integrationsveränderliche a einführen, können wir auch setzen:

$$\xi_1^{\mathrm{II}} = \frac{H(\varkappa)}{\varrho \sigma_2^2} \int_{\Omega} \frac{x_1 - a}{|x_1 - a|} S_{22}\left(a, t - \frac{|x_1 - a|}{\varkappa \sigma_2}\right) da \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27\,\mathrm{a})$$

wo die nur vom Verhältnis zwischen den beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten abhängige Konstante H (die Bezeichnung in Übereinstimmung mit Lamb) den Wert hat:

$$H(\varkappa) = \frac{2 - \varkappa^2 - 2\sqrt{(1 - \varkappa^2)\left(1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\varkappa^2\right)}}{\varkappa D'(\varkappa)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28).$$

In derselben Weise findet man für die andere Komponente:

$$\xi_2^{\mathrm{II}} = -\frac{H(\varkappa)}{\varrho \sigma_2^2} \int_{\Omega} \frac{x_1 - a}{|x_1 - a|} S_{12}\left(a, t - \frac{|x_1 - a|}{\varkappa \sigma_2}\right) da \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27\,\mathrm{b}).$$

Offenbar sind ξ_1^{II} und ξ_2^{II} Rayleighsche Solitärwellen. Bei Zusammenfassung von (26, 27a, b) erhalten wir den endgültigen Ausdruck für die Oberfläche:

$$\xi_1 = \xi_1^{\mathrm{I}} + \xi_1^{\mathrm{II}}, \qquad \xi_2 = \xi_2^{\mathrm{I}} + \xi_2^{\mathrm{II}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29),$$

den wir hier wohl nicht vollständig auszuschreiben brauchen. Man sieht ohne Schwierigkeit, daß der Teil von ξ_1, der von S_{22} stammt, eine ungerade, der Teil aber, der von S_{12} stammt, eine gerade Funktion von $x_1 - a$ ist, und daß umgekehrtes für ξ_2 gilt (von Lamb angegeben). Wenn man in (26, 27a, b) $S_{12} = 0$ setzt und S_{22} durch eine konzentrierte Druckkraft im Origo ersetzt, somit $\int S_{22} \, da = -Q$, findet man bei Einsetzung der Veränderlichen $\Theta = \frac{t - \tau}{x_1 - a}$ genau die Formel von Lamb (92, 93), Seite 22 in der angeführten Arbeit.

Eine einfache Berechnung von Strömungsfunktionen.

Von *H. Steuding* VDI in Breslau.

Für den allgemeinen Fall der ebenen Potentialströmung um ein beliebig bewegtes und veränderliches Profil sind m. W. bisher wohl kaum Strömungsfunktionen bekannt geworden, wenn man von dem klassischen bei Lamb[1]) behandelten Beispiel eines elliptischen Zylinders mit unveränderlichem Profil absieht. Im folgenden bringe ich ein äußerst einfaches, jedoch strenges Verfahren für die Ermittlung solcher Strömungsfunktionen[2]), wobei ich mich auf die zirkulationsfreie Strömung beschränke, denn die Zirkulation bleibt ja gewissermaßen willkürlich und wird nach anderen bekannten Gesichtspunkten[3]), welche hier nicht erörtert werden sollen, festgelegt.

1. Die allgemeine Herleitung. Vorausgesetzt wird nur, daß die Abbildungsfunktion

$$\zeta = f(z, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

welche das gegebene bewegte mit der Zeit veränderliche Profil in der $\zeta = \xi + i\eta$ Ebene auf den Kreis in der $z = x + iy$ Ebene vom Halbmesser $\varrho(t)$, welcher demzufolge ebenfalls von der Zeit t abhängen muß, abbildet, bekannt oder angenähert analytisch, etwa durch die Laurentsche Reihe, darstellbar ist.

Bezeichnen wir die konjugierten Größen, welche durch Vorzeichenwechsel bei i erhalten werden, durch Überstreichen, so haben wir neben der Beziehung (1) noch die zweite

$$\bar{\zeta} = \bar{f}(\bar{z}, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Setzt man in (1) und (2) die Randpunkte des Kreises $z = \varrho\, e^{i\varphi}$ bzw. $\bar{z} = \varrho\, e^{-i\varphi}$ ein, so erhält man für die Zuordnung der Ränder die entsprechenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= f(\varrho\, e^{i\varphi}, t) \\ \bar{\zeta} &= \bar{f}(\varrho\, e^{-i\varphi}, t) \end{aligned}\right\} \text{für den Rand} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} (3), \\ (4), \end{cases}$$

wo die Funktionen f und $\bar{f}$ nur noch die beiden unabhängigen Veränderlichen φ und t enthalten.

Der Geschwindigkeitsvektor eines Randpunktes des Profils ist durch die totale Ableitung

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + i\,\frac{d\eta}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gegeben. Der Einheitsvektor in Richtung der Normalen nach außen positiv gerechnet wird durch

$$-i\,\frac{\partial \zeta}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dargestellt, wenn s längs des Profilrandes gemessen wird. Die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Normalen erhält man nun als Realteil des Produktes von (5) und der konjugierten Größe von (6) zu

$$\mathrm{Real}\left(i\,\frac{d\zeta}{dt}\,\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Bezeichnen wir die gesuchte Strömungsfunktion mit

$$W(\zeta, t) = \Phi(\xi, \eta, t) + i\,\Psi(\xi, \eta, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

so erhalten wir die Geschwindigkeitskomponente der Flüssigkeit am Profil in Richtung der Normalen aus $\partial \Psi / \partial s$ und mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\Psi = \mathrm{Real}\,(-i\,W) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

können wir

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \mathrm{Real}\left(-i\,\frac{\partial W}{\partial s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

setzen.

---

1) Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Helly, 2. Aufl., S. 97.

2) Luntz: C. R. 199 (1934), S. 662, behandelt dieselbe Aufgabe jedoch umständlicher. In der vorliegenden Darstellung hatte ich den Gegenstand bereits meinen Hörern vorgetragen.

3) Vgl. z. B. die neueste Zusammenfassung bei Fuchs-Hopf-Seewald: Aerodynamik, 2. Aufl., Bd. 2 (1935), S. 257 u. f

Aus der Randbedingung, daß diese beiden Geschwindigkeitskomponenten (7) und (10) übereinstimmen müssen, folgt die ganz allgemeine Gleichung für die Ermittlung der Strömungsfunktion W

$$\mathrm{Real}\left(-i\frac{\partial W}{\partial s}\right)=\mathrm{Real}\left(i\frac{d\zeta}{dt}\frac{\partial\bar\zeta}{\partial s}\right)\text{ am Profilrand}\quad\quad(11).$$

Nach Einsetzen von (1) und (2) geht diese Beziehung für den Profilrand in die entsprechende für den Bildkreis

$$\mathrm{Real}\left(-i\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)=\mathrm{Real}\left(i\frac{df}{dt}\frac{\partial\bar f}{\partial\varphi}\right)\text{ am Kreis}\quad\quad(12)$$

über, wenn noch ∂s durch $\varrho\, d\varphi$ ersetzt und durch ϱ gekürzt wird.

Für die abgebildete Strömungsfunktion machen wir den Ansatz

$$W=(q+\gamma i)\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+i\beta_n)\left(\frac{\varrho}{z}\right)^n\quad\quad(13),$$

wo das Glied $q\ln z$ eine Quell- oder Senkströmung und das Glied $i\gamma\ln z$ eine Zirkulationsströmung darstellen. Dieses letzte Glied ist nur der Vollständigkeit halber, um lauter komplexe Größen zu haben, beibehalten worden, denn γ bleibt, wie bereits erwähnt, willkürlich.

Setzt man in (13) $z=\varrho\, e^{i\varphi}$ ein, so erhält man

$$\mathrm{Real}\left(-i\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)=q-\sum_{n=1}^{\infty}n\,(a_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)\quad\quad(14),$$

so daß die Gl. (12) die folgende Form annimmt:

$$\mathrm{Real}\left(i\frac{df}{dt}\frac{\partial\bar f}{\partial\varphi}\right)-q+\sum_{n=1}^{\infty}n\,(a_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)=0\text{ am Kreis}\quad\quad(15).$$

Daraus erhalten wir die einfachen Schlußformeln

$$\left.\begin{aligned}q&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Real}\left(i\frac{df}{dt}\frac{\partial\bar f}{\partial\varphi}\right)d\varphi,\\ a_n&=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Real}\left(i\frac{df}{dt}\frac{\partial\bar f}{\partial\varphi}\right)\cos n\varphi\, d\varphi,\\ \beta_n&=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Real}\left(i\frac{df}{dt}\frac{\partial\bar f}{\partial\varphi}\right)\sin n\varphi\, d\varphi\end{aligned}\right\}\quad\quad(17)$$

für die Berechnung der Beiwerte des Ansatzes (13), womit die gestellte Aufgabe ganz allgemein und streng gelöst ist.

2. Der Sonderfall der Drehung eines unveränderlichen Profils. Die Abbildung setzt sich in diesem Fall aus einer von der Zeit unabhängigen

$$\zeta_0=f_0(z)\quad\quad(18)$$

und einer in der Zeit veränderlichen, der Drehung entsprechenden

$$\zeta=\zeta_0\, e^{i\vartheta(t)}\quad\quad(19)$$

zusammen, so daß die Beziehung (1) die Form

$$\zeta=f_0(z)\, e^{i\vartheta(t)}=f(z,t)\quad\quad(20)$$

annimmt.

In Gl. (11) eingesetzt erhält man unmittelbar nach Integration

$$\mathrm{Real}\,(-i\,W) + \frac{\omega}{2}\,\zeta_0\,\bar{\zeta}_0 = \text{konst am Profilrand}^{4)} \quad \ldots\ldots \quad (21),$$

wo $\omega = \vartheta'$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet, und daraus mit Berücksichtigung von (18) die Gleichung am Bildkreis

$$\mathrm{Real}\,(-i\,W) + \frac{\omega}{2}\,f_0\,\bar{f}_0 = \text{konst am Kreis} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Im Ansatz (13) für das Bild der Strömungsfunktion müssen wir bei dieser Herleitung das logarithmische Glied weglassen und erhalten in derselben Weise wie vorher die den Formeln (17) entsprechenden einfacheren Ausdrücke

$$q = 0\,, \qquad \alpha_n = \frac{\omega}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} f_0\,\bar{f}_0 \sin n\,\varphi\,d\,\varphi\,, \qquad \beta_n = -\frac{\omega}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} f_0\,\bar{f}_0 \cos n\,\varphi\,d\,\varphi \quad \ldots \quad (23)$$

so, wie wir sie auch durch Einsetzen von (20) in (17) nach einer partiellen Integration finden würden.

3. Einige Bemerkungen. Für das Beispiel einer Ellipse mit den Halbachsen a und b und der Abbildungsfunktion

$$\zeta = z + \frac{a^2 - b^2}{4\,z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

erhält man für die Drehbewegung aus (23) die von Lamb angegebene Strömungsfunktion. Für die in Ruhe befindliche und pulsierende Ellipse, bei der also a und b Funktionen der Zeit sind, gewinnt man aus den Formeln (17) die abgebildete Strömungsfunktion

$$W = \frac{(a\,b' - a'\,b)\,(a + b)^2}{16\,z^2} + \frac{(a\,b)'}{2}\ln z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

und mit Berücksichtigung von (24) und Einführung elliptischer Koordinaten

$$w = u + i\,v\,, \qquad \zeta = \sqrt{a^2 - b^2}\,\mathfrak{Kof}\,w\,, \qquad z = \frac{e^w}{2}\sqrt{a^2 - b^2} \quad \ldots \quad (26),$$

die Strömungsfunktion in elliptischen Koordinaten

$$W = \frac{(a\,b' - a'\,b)\,(a + b)}{4\,(a - b)}\,e^{-2w} + \frac{(a\,b)'}{2}\ln\left(\frac{e^w}{2}\sqrt{a^2 - b^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (27).$$

Im praktischen Fall geht man zweckmäßig so vor, daß man die allgemeine Strömung in die drei Anteile: 1. die Grundströmung aus der translatorischen Bewegung des Profils, 2. die Strömung aus der Drehbewegung um einen festen Punkt und 3. die Strömung infolge der Verformung des ruhenden Profils, zerlegt. Die Strömungsfunktion für die Grundströmung wird genau so ermittelt und ist genau dieselbe wie im stationären Fall mit dem Unterschied nur, daß die Beiwerte Funktionen der Zeit sind, was jedoch in der Berechnung nicht zum Vorschein kommt. Die Strömungsfunktion für die Drehbewegung wird mit Hilfe der einfachen Formeln (23) berechnet und nur für die Ermittlung der dritten Strömungsfunktion infolge der Profilverformung werden die allgemeinen Formeln (17) verwandt.

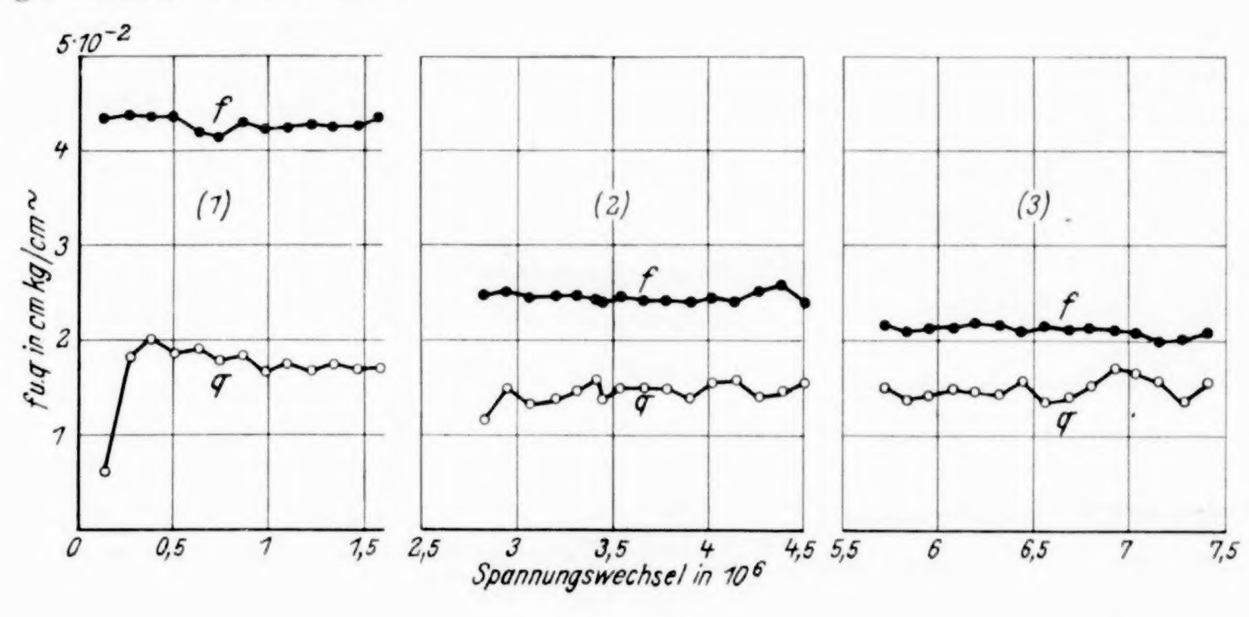
Schließlich sei noch nebenbei bemerkt, daß für die Ermittlung der Kräfte die bei der stationären Bewegung übliche Umkehrung nicht mehr gilt. Es läßt sich z. B. leicht zeigen, daß bei der geradlinigen beschleunigten Bewegung eines Kreiszylinders die Kraft aus dem Flüssigkeitsdruck bei bewegtem Zylinder und ruhender Flüssigkeit genau halb so groß ist, als im umgekehrten Fall eines ruhenden Zylinders in einer beschleunigt bewegten Flüssigkeit. Nur in dem Ausnahmefall, daß ein Vollzylinder dieselbe Dichte wie die Flüssigkeit hat und daß nach der Kraft gefragt wird, welche notwendig ist, um den Zylinder in einer ruhenden Flüssigkeit zu beschleunigen, bzw. ihn in einer beschleunigt bewegten Flüssigkeit festzuhalten, erhält man dieselbe Größe. Im ersten Fall teilt sich die Kraft genau je zur Hälfte auf die Überwindung des Flüssigkeitsdruckes und der Trägheitskraft der Zylindermasse. Im zweiten Fall wird die ganze Kraft gebraucht, um dem Flüssigkeitsdruck allein standzuhalten. 562

[4]) Diese Gleichung ist mit der von Lamb, a. a. O., S. 95, Gl. (1), angegebenen identisch, bis auf das Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit, die dort im entgegengesetzten Sinn positiv angesetzt ist.

Der Energieverbrauch und die Wärmeentwicklung des schwingenden Stahlstabes.

Von *Akimasa Ono*, Fukuoka (Japan).

1. Einleitende Bemerkung über Dauerbiegeversuche. Die Energiebilanz, die im Dauerbiegeversuch entsteht, wurde bei einer früheren Gelegenheit mitgeteilt[1]). Dieser Versuch wurde an rotierenden Rundstäben in einer besonders zu diesem Zwecke konstruierten Maschine ausgeführt. Seit jener Zeit wurde der Versuchsapparat teilweise verbessert und die Untersuchung noch weiter fortgesetzt, um die früheren Versuchsergebnisse kontrollieren zu können. Die vorliegende Mitteilung bezweckt, erst die neueren Ergebnisse der Biegeversuche kurz zu streifen, und dann das Versuchsverfahren und einige von den Ergebnissen der Drehschwingungsversuche einzuführen.



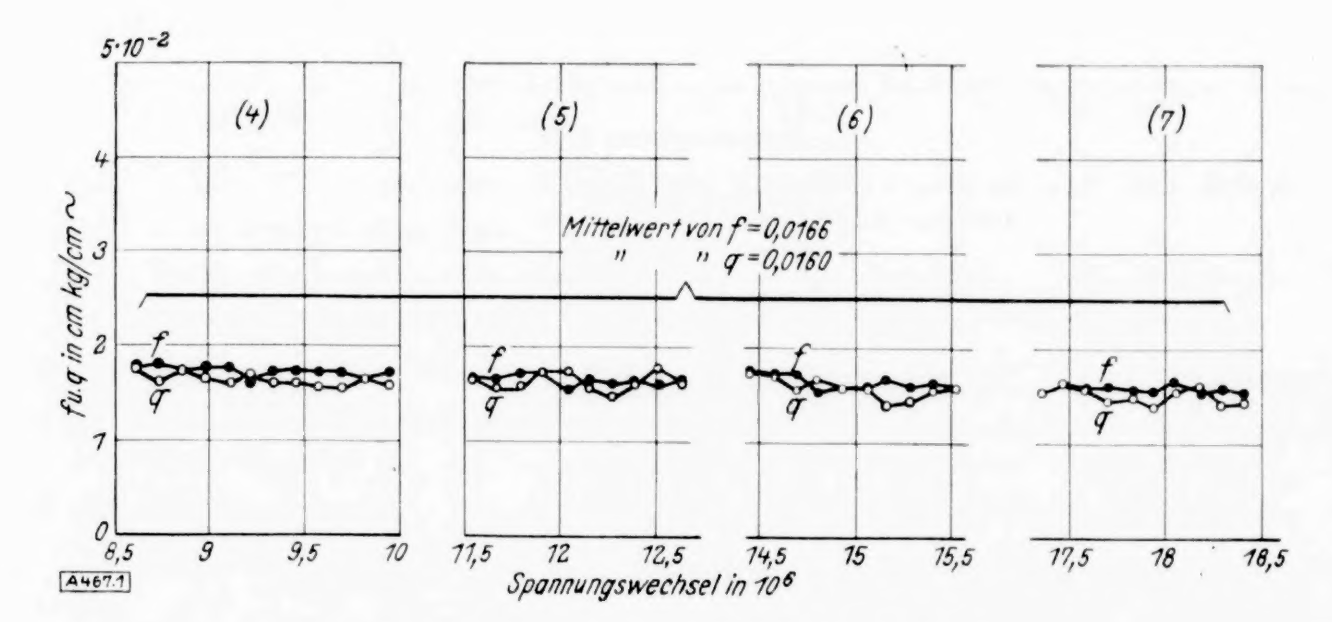


Abb. 1. Versuchsreihe 19, Biegung, Stab Nr. 4.
Spannungsgrenzen = ± 16 kg/mm², Raumtemperatur während der Tageszeit = 26,9° — 29,7° C.

Bezüglich der Versuchsanordnung der Biegung sei auf die frühere Arbeit (a. a. O.) hingewiesen. Das Material, mit dem die vorliegenden Versuche ausgeführt wurden, ist das sogenannte Armco-Eisen von etwa 0,04 % Kohlenstoffgehalt; es wurde im gewalzten Zustande benutzt. Die Zugfestigkeit = 3321 kg/cm², und die Bruchdehnung = 34,3 %. Der Durchmesser des Probestabes ist gleich 12 mm, und die Länge des zylindrischen Teiles beträgt 145 mm im Stab Nr. 8 und 149 mm im Stab Nr. 4. Die Konstante $h\,a$ (h = Verhältnis von der Wärmeübergangszahl und der Wärmeleitfähigkeit; a = Halbmesser des Stabquerschnittes) wurde neu bestimmt. Dies war nötig nicht nur wegen der Verschiedenheit des Versuchsstoffes, sondern auch wegen der Abänderung der Anordnung der Thermoelemente, welche auf der Oberfläche des Stabes befestigt wurden und den Wärmeübergang beeinflussen sollten. Im erneuten Zustand der Versuche und für das vorliegende Material findet man $h\,a = 3{,}72 \cdot 10^{-3}$ bei der Geschwindigkeit von 2000 U/min. Dieser Zahlenwert kann im Biegeversuch als eine Konstante für die ganze Meßlänge des Stabes benutzt werden, da die Relativgeschwindigkeit der Staboberfläche gegen

[1]) Verhandlungen des III. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, II, S. 305.

Luft als unveränderlich angenommen werden darf. Es sei hier bemerkt, daß bei der Drehschwingung $h\,a$ keine Konstante ist, sondern eine Funktion vom Abstande des Stabquerschnittes, wie es im nachstehenden näher erklärt wird.

In Abb. 1, die das Versuchsergebnis von Stab Nr. 4, Versuchsreihe 19, darstellt, zeigt die Kurve f die mechanische Arbeit, die für jede Längeneinheit des Stabes während einer Umdrehung geleistet wurde, und die Kurve q zeigt die entsprechende Wärmeenergie. Die Spannungsgrenzen sind ± 16 kg/mm². Die Kurve f liegt erst viel höher als q und fällt allmählich mit dem Spannungswechsel. Nach etwa $8{,}62 \cdot 10^6$ Umdrehungen werden die beiden Linien ungefähr gleich hoch. Die Raumtemperatur veränderte sich bei diesem Versuch von 26,9° bis 29,7° während der Tageszeit.

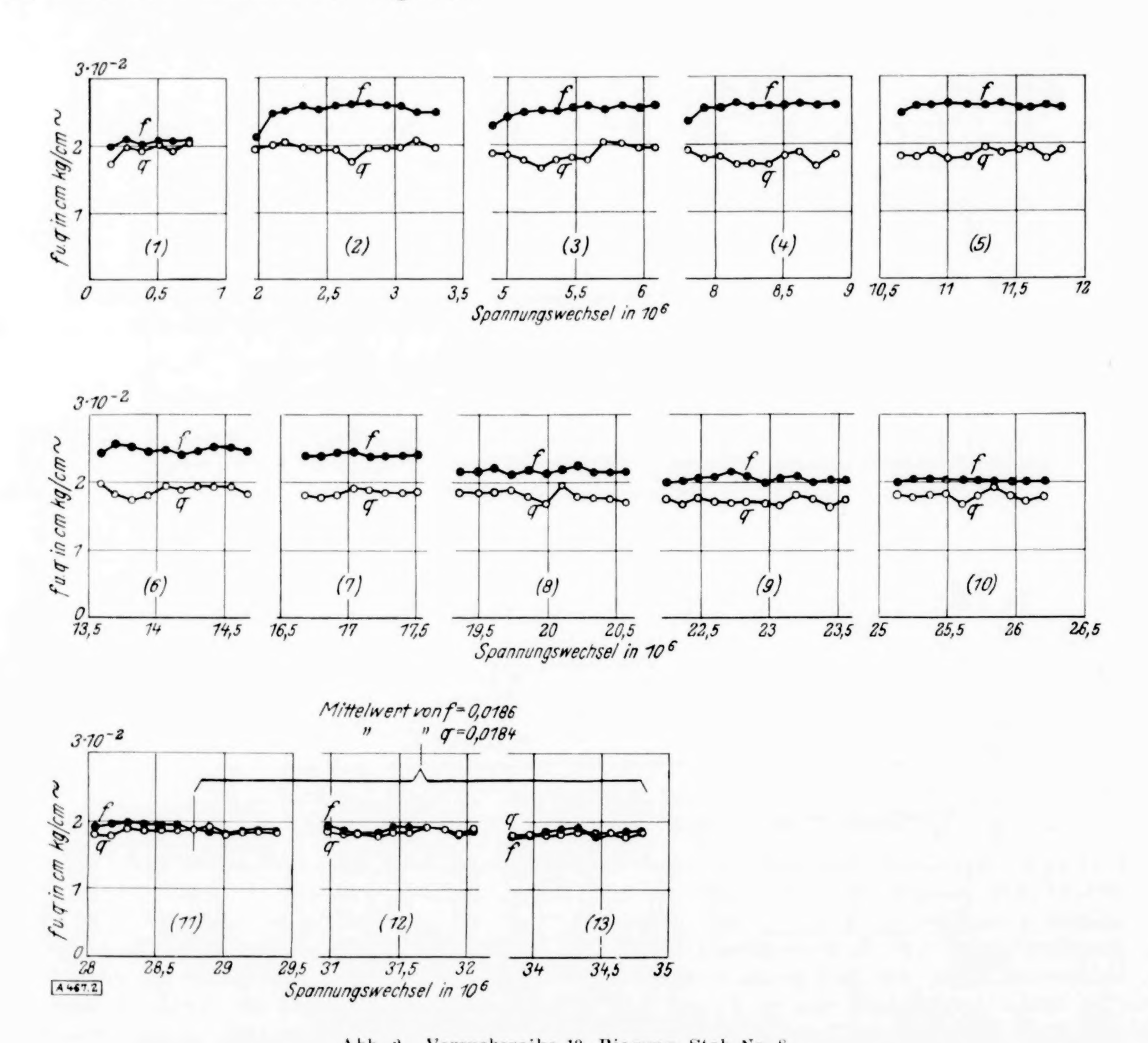


Abb. 2. Versuchsreihe 19, Biegung, Stab Nr. 8.

Spannungsgrenzen = ± 16 kg/mm², Raumtemperatur während der Tageszeit = 8,6° – 15,1° C.

Ein anderes Beispiel, Stab Nr. 8, Versuchsreihe 19, ist in Abb. 2 dargestellt. Die Raumtemperatur schwankte in diesem Fall von 8,6° bis 15,1° während der Tageszeit. Die Kurve f ist erst nicht viel höher als q, aber sie steigt mit dem Spannungswechsel bis zu einer maximalen Höhe. Nach Verlauf von etwa 10 Tagen ($28{,}79 \cdot 10^6$ U.) stimmen die beiden Kurven überein.

Die vorstehenden Beispiele bestätigen die früheren Ergebnisse (a. a. O.), daß die der elastischen Hysteresis entsprechende Arbeit das mechanische Äquivalent der entwickelten Wärme überwiegt, solange die Anzahl der wiederholten Spannungswechsel nicht groß ist. Wird die genannte Zahl genügend groß, so werden die beiden Arten der Energie gleich (stationärer Zustand), vorausgesetzt, daß die Spannung unter der Schwingungsfestigkeit des Materials ist. Der Unterschied zwischen den beiden Energiegrößen ist wahrscheinlich gleich der Änderung der inneren Energie des Stabes.

Die mittleren Werte von f und q im stationären Zustande sind in Abb. 1 bzw. Abb. 2 gegeben. Die Energiezunahme, welche durch Integration der Zwischenfläche von der Ordinate $f-q$ bis zum stationären Zustande gegeben wird, ist sehr groß, wenn man sie nur mit der Kenntnis vom gewöhnlichen Zugversuch ansieht. Dies scheint eine beachtenswerte Eigenschaft des Materials zu sein.

Soweit bezieht sich die einleitende Bemerkung auf den Biegeversuch. Ob eine ähnliche Tatsache auch bei der Drehschwingung existiert, ist eine Frage. Deswegen sind die Versuche seit einigen Jahren in dieser Richtung erweitert worden.

2. Drehschwingungsversuch. Eine Drehschwingungsmaschine, welche von der Firma MAN, Nürnberg, geliefert wurde, wurde benutzt, und eine besondere Vorrichtung zur Ermittlung der mechanischen Arbeit wurde größtenteils hier in unserem Laboratorium zugefügt, wobei das ursprüngliche Meßverfahren im wesentlichen beibehalten wurde. Da die Maschine im weiteren Kreise vielleicht nicht gut bekannt ist, wird eine kurze Beschreibung davon nicht überflüssig sein[2]). In Abb. 3 ist der Probestab an einem Ende festgespannt und am anderen Ende mit dem Spannungskopfe der Welle verbunden, auf der der Anker aufgekeilt ist. Das Gehäuse mit den elektromagnetischen Polen im Inneren ist auf der Welle drehbar gelagert, und bei der Drehung übt die Torsionsfeder ihre elastische Kraft aus. Auf der Schwungscheibe steht ein Paar Kontakthämmer, welche bei der Schwingung der Scheibe zwischen zwei Anschlägen pendeln und den Strom durch das magnetische Feld taktweise umschalten. Auf diese Weise schwingt der Anker mit dem Stabe um seine Achse; dabei entsteht natürlich die Rückwirkung auf das Gehäuse, welches auch die Schwingung der gleichen Periode ausführt.

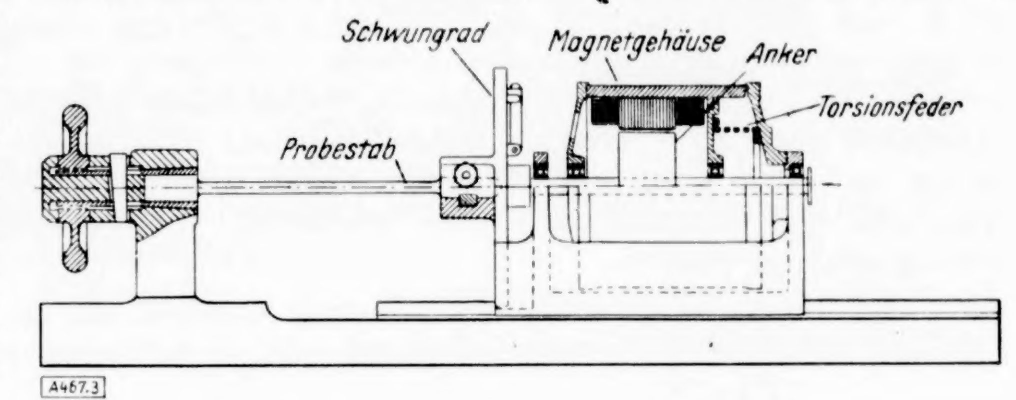


Abb. 3. Drehschwingungsmaschine (MAN).

Es sei durch $G J_p$ die Torsionssteifigkeit des kreiszylindrischen Stabes mit der Länge l ausgedrückt. Ferner bezeichne man mit

J_1 das Trägheitsmoment des Ankers mit dem Schwungrad und den Zubehörteilen,
ϑ_1 den Drehwinkel desselben,
J_2 das Trägheitsmoment des Gehäuses,
ϑ_2 den Drehwinkel desselben,
M das erregende Moment der elektromagnetischen Kraft,
η den Dämpfungskoeffizienten[3]) des Probestabes einschließlich des Reibungs- und Luftwiderstandes,
k die Federkonstante.

Dann hat man unter Vernachlässigung von Dämpfung der Gehäuseschwingung

$$J_1 \frac{d^2 \vartheta_1}{d t^2} + \eta \frac{J_p}{l} \frac{d \vartheta_1}{d t} + G J_p \frac{\vartheta_1}{l} = M, \qquad J_2 \frac{d^2 \vartheta_2}{d t^2} + k \vartheta_2 = -M,$$

wobei M als eine periodische Funktion etwa von der Form $\Sigma A_n \cos(n \omega t - \beta_n)$ betrachtet werden kann. Da wir uns ausschließlich mit der Resonanzschwingung des Stabes von der Geschwindigkeit ω beschäftigen, setzen wir besonders $M = M_0 \cos \omega t$.

Als die Lösungen der Differentialgleichungen schreiben wir

$$\vartheta_1 = C \cos(\omega t - \varepsilon), \qquad \vartheta_2 = D \cos \omega t.$$

Insbesondere wenn $\omega = \sqrt{G J_p / l J_1}$ ist, so lauten bekanntlich

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad C = \frac{M_0 l}{\eta J_p \omega}.$$

[2]) Eine Beschreibung findet man in der von der Firma MAN herausgegebenen Druckschrift oder z. B. in Föppl-Becker-v. Heydekampf: Dauerprüfung der Werkstoffe, 1929, S. 100.

[3]) η ist so definiert, daß $\eta \frac{d\gamma}{dt}$ (γ = Schiebung) die Intensität der Dämpfungskraft ausdrückt, aber damit ist hier nicht gemeint, daß η eine wahre Konstante ist, weil η von der maximalen Spannung und von der Schwingungsperiode abhängig sein kann.

Nun sieht man aus der zweiten Differentialgleichung, daß

$$M_0 = (\omega^2 J_2 - k)\, D\,.$$

Also

$$M = (\omega^2 J_2 - k)\, \vartheta_2\,.$$

Die mechanische Arbeit, die bei einer vollen Schwingung an dem Probestab geleistet wird, ist gegeben durch

$$A = \oint M\, d\vartheta_1 = (\omega^2 J_2 - k) \oint \vartheta_2\, d\vartheta_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Tragen wir ϑ_1 und ϑ_2 als rechtwinklige Koordinaten in einem Schaubild auf, so erhalten wir eine Kurvenschleife; die gesuchte Arbeit läßt sich aus dem Flächeninhalt der Schleife nach einfacher Rechnung bestimmen. Um diese Ermittlung zu erleichtern, haben wir einen zu diesem Zweck konstruierten Spiegelapparat benutzt, welcher aus Abb. 4a und b (Aufriß und Grundriß) ersichtlich ist. S_1 ist ein Spiegel mit einer senkrechten Achse, welche durch Hebel und Kurbel mit der Ankerwelle verbunden ist. Die Bewegung von S_1 um seine Achse stellt also den Winkel ϑ_1 dar. S_2 ist ein anderer Spiegel mit einer waagrechten Achse, welche mit einem rhombischen Prisma verbunden ist. Die Drehung des Gehäuses ϑ_2 verursacht die Drehung des Spiegels S_2. Das Licht kommt von hinten, fällt auf S_2 auf und reflektiert nach S_1. Nach dem Auffallen auf S_1 wird es wieder reflektiert nach vorn und bringt auf eine senkrecht stehende Ebene einen Lichtpunkt, der bei der Schwingung der Maschine eine geschlossene Kurve beschreibt. Die Kurve kann leicht skizziert (oder eventuell photographiert) werden.

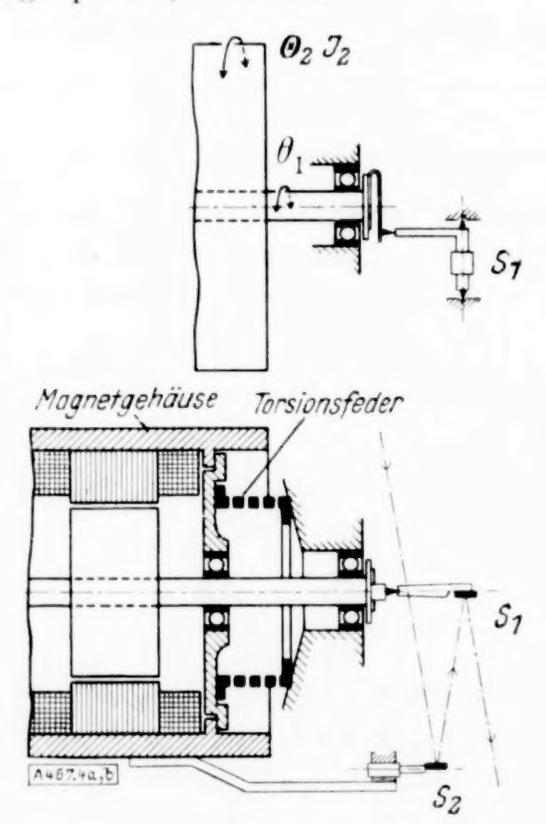


Abb. 4 a u. b. Meßvorrichtung.

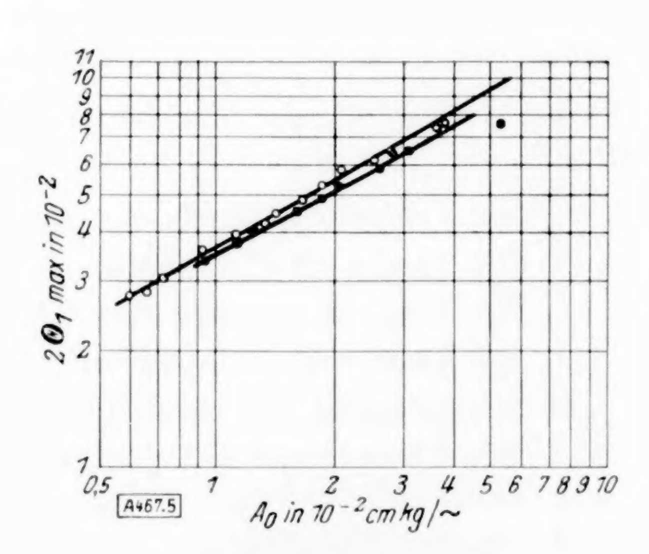


Abb. 5. Reibungsarbeit.

Es ist nun zu bemerken, daß die auf diese Weise bestimmte Arbeit, die durch Reibung an den Kugellagern und vielleicht auch an den Spannstellen des Stabes und ferner noch durch Luftwiderstand verbrauchte Energie enthält. Um diese Energie von der gesamten Energie abzuziehen, führen wir Sonderversuche aus, bei welchen ein Stab aus gehärtetem Stahl benutzt wird. Die Abmessung des Stabes ist so bestimmt, daß die Eigenschwingungszahl gleich der der Hauptprobe ist. Aus dem statischen Versuch weiß man, daß die elastische Hysteresis bei einer niedrigen Spannung kaum bemerkbar ist. Das Gesetz, nach welchem die Reibungsarbeit sich mit der Schwingungsweite verändert, ist in diesem völlig elastischen Bereich bestimmt, und nötigenfalls wird die gefundene Beziehung zwischen beiden für eine etwas höhere Spannung extrapoliert (siehe Abb. 5). Die auf diese Weise gefundene Arbeit A_0 wird als der gesuchte Verlust betrachtet, welcher von der im Hauptversuch bestimmten Arbeit A abgezogen wird. Also ist die wirksame Arbeitsleistung gleich $A - A_0$, oder bezogen auf die Längeneinheit des Probestabes von der Länge l

$$f = \frac{A - A_0}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Da A_0 verhältnismäßig nicht klein ist, büßt die Genauigkeit von f ein, wenn die Bestimmung von A_0 unsicher ist; folglich ist es nötig, A_0 möglichst genau zu bestimmen.

3. Bestimmung der Wärme. Rückblick auf den früheren Fall, wo die Wärmeübergangszahl unveränderlich ist. Die Wärmemenge, welche in einer Sekunde von der Raumeinheit des Stabes entwickelt wird, ist sowohl bei der Biegung als auch bei der Torsion entlang der Länge eine Konstante, weil der Spannungszustand längs des Stabes unveränderlich ist, während sie sich nach der Richtung des Halbmessers in einem Querschnitt verändert. In einem früheren Aufsatz[4]) wurde schon kurz bemerkt, daß die von der Längeneinheit des Stabes entwickelte Wärmemenge aus einem konstanten Mittelwert von W über den Querschnitt ausgerechnet und die Berechnung unter Annahme einer linearen Temperaturverteilung ausgeführt werden kann. Um diese Annahme zu prüfen, nehme man den früheren Fall, wo die Wärmeübergangszahl unveränderlich ist. Bei der Drehschwingung verändert sich die Schwingungsweite des Stabes von einem Querschnitt zu einem anderen, und wegen der veränderlichen Relativgeschwindigkeit der Staboberfläche gegen Luft ist die genannte Zahl veränderlich; deshalb kann die folgende Berechnung da nur eine qualitative Bedeutung haben.

Mit diesem Vorbehalt sei es erst gezeigt, daß die Wärmemenge durch Messung der Oberflächentemperatur bestimmt werden kann, ohne das Gesetz zu kennen, nach dem die Wärmeentwicklung in einem Querschnitt stattfindet. Man bezeichne mit

z den Abstand in der Richtung der Stabachse,
r den radialen Abstand,
v den Temperaturunterschied des Stabpunktes über die umgebende Luft,
W die in einer Sekunde von einem Kubikzentimeter entwickelte Wärmemenge,
K die Wärmeleitfähigkeit des Stabmaterials.

Abgesehen von der Anlaufperiode ist die zeitliche Veränderung von v so langsam, daß man ruhig einen stationären Zustand annehmen kann. Also lautet bei achsensymmetrischer Wärmeleitung bekanntlich

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{W}{K} = 0 \quad \ldots \quad (3).$$

W ist unabhängig von z, wie schon bemerkt wurde, aber sie ist eine unbekannte Funktion von r.

Die Lösung der Differentialgleichung kann geschrieben werden wie

$$v = F + R \quad \ldots \quad (4),$$

wobei R eine Funktion von r ist. Man setze diesen Ausdruck in (3) und wähle F und R so, daß

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

und

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d R}{d r} + \frac{W}{K} = 0 .$$

F läßt sich in bekannter Weise gleich $\begin{pmatrix}\sin \alpha_n z\\ \cos \alpha_n z\end{pmatrix} I_0(\alpha_n r) + \mu z$ setzen, wobei $I_0(\alpha_n r) = J_0(i\,\alpha_n r)$ die Besselsche Funktion von der Ordnung Null bedeutet, und R ist in folgender Weise auszudrücken. Nämlich, wir nehmen K als eine Konstante und erhalten aus der zweiten Gleichung nach einmaliger Integration

$$r\frac{d R}{d r} + \frac{1}{K}\int W r\, d r = c .$$

Schreiben wir an der Stelle des unbestimmten Integrals schlechthin S, nämlich

$$S = \int W r\, d r ,$$

so folgt nach nochmaliger Integration

$$R = c \ln r - \frac{1}{K}\int \frac{S}{r}\, d r + c' .$$

Da R für $r = 0$ endlich sein soll, ist $c = 0$. Also

$$R = c' - \frac{1}{K}\int \frac{S}{r}\, d r \quad \ldots \quad (5).$$

Folglich lautet:

$$v = \Sigma \{B_n \cos \alpha_n z + C_n \sin \alpha_n z\}\, I_0(\alpha_n r) + \mu z + R \quad \ldots \quad (6).$$

[4]) Siehe Fußnote 1.

Die Randbedingungen sind nun wie folgt:

$$\left.\begin{array}{lll} r=a, & z=l: & v=v_0 \\ r=a, & z=0: & v=v_m \\ r=a, & z=-l: & v=v'_0 \\ r=a: & & \dfrac{\partial v}{\partial r}+h\,v=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

In der letzten Gleichung $h=\frac{H}{K}=$ const (H die Wärmeübergangszahl). Im vorliegenden Falle sind v_0, v_m, v'_0, h bekannt, und es wird die Wärmemenge $2\pi\int\limits_0^a W\,r\,d\,r=2\pi S_1$ gesucht, wobei S_1 gleich S an der oberen Grenze $r=a$ ist, weil der Wert von S für $r=0$ sicher gleich Null sein wird. Ferner wählen wir α_n, so daß $\cos\alpha_n l=0$ ist, d. h. $\alpha_n=\frac{n\pi}{2l}$ mit $n=1,3,5,\ldots$.

Aus den drei ersten Randbedingungen von (7) haben wir nun mit $R_1=$ Randwert von R

$$\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n I_0(\alpha_n a)+\mu l+R_1=v_0,$$

$$\Sigma B_n I_0(\alpha_n a)+R_1 \qquad\qquad =v_m,$$

$$-\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n I_0(\alpha_n a)-\mu l+R_1=v'_0.$$

Aus den ersten und dritten Gleichungen haben wir

$$R_1=\frac{1}{2}(v_0+v'_0),$$

ebenso

$$\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n I_0(\alpha_n a)+\mu l=\frac{1}{2}(v_0-v'_0).$$

Die letzte Randbedingung von (7) ist die folgende:

$$\Sigma(B_n\cos\alpha_n z+C_n\sin\alpha_n z)\{\alpha_n I_1(\alpha_n a)+h\,I_0(\alpha_n a)\}+h\,\mu\,z-\frac{S_1}{K a}+h\,R_1=0.$$

Nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cos\frac{n\pi z}{2l}=\frac{\pi}{4} \\ \displaystyle\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\sin\frac{n\pi z}{2l}=\frac{\pi^2}{8}\frac{z}{l} \end{array}\right\} n=1,3,5,\ldots.$$

Also setzen wir

$$B_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{4}{\pi n}\left(\frac{S_1}{K a}-h\,R_1\right)\Big/\{\alpha_n I_1(\alpha_n a)+h\,I_0(\alpha_n a)\},$$

$$C_n=-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{8\,l}{\pi^2 n^2}h\,\mu\Big/\{\alpha_n I_1(\alpha_n a)+h\,I_0(\alpha_n a)\}.$$

Mit diesen Ausdrücken ergeben sich

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{S_1}{K a}-h\,R_1\right)\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\,\frac{I_0(\alpha_n a)}{\alpha_n I_1(\alpha_n a)+h\,I_0(\alpha_n a)}+R_1=v_m,$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\mu\,l\,h\sum\frac{1}{n^2}\,\frac{I_0(\alpha_n a)}{\alpha_n I_1(\alpha_n a)+h\,I_0(\alpha_n a)}+\mu\,l=\frac{1}{2}(v_0-v'_0).$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen können wir μ bestimmen, aber es genügt, zum vorliegenden Zweck S_1 aus der ersten Gleichung zu ermitteln, nämlich

$$S_1 = K\left\{\frac{\pi}{4\varphi}\left(v_m - \frac{v_0 + v'_0}{2}\right) + \frac{h\,a}{2}(v_0 + v'_0)\right\} \quad \ldots \ldots \quad (8),$$

wobei

$$\varphi = \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{I_0(\alpha_n a)}{\alpha_n a\, I_1(\alpha_n a) + h\,a\, I_0(\alpha_n a)}.$$

S_1 ist also bestimmt, ohne die Funktion W von r zu kennen.

Die numerische Berechnung von S_1 in der obigen Weise auszuführen, ist ziemlich umständlich, aber man kann eine Vereinfachung einführen, indem die Mittelwerte von W und ferner noch von $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ in einem Querschnitte benutzt werden. Dann ergibt sich bekanntlich aus (3) nach Integration von $r = 0$ bis $r = a$ eine Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung, d. h.

$$\frac{d^2 v}{d z^2} - \frac{2 h v}{a} + \frac{W}{K} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet mit $\beta^2 = \frac{2h}{a}$

$$v = C_1 \cosh \beta z + C_2 \sinh \beta z + \frac{W}{\beta^2 K} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Aus den Bedingungen, nämlich

$$z = l, \quad v = v_0; \qquad z = 0, \quad v = v_m; \qquad z = -l, \quad v = v'_0,$$

erhalten wir

$$W = \beta^2 K \frac{v_m \cosh \beta l - \frac{1}{2}(v_0 + v'_0)}{\cosh \beta l - 1} \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

woraus die gesuchte Wärmemenge $\pi a^2 W$ berechnet werden kann.

Die numerische Berechnung mit (8) bzw. (11) unter Annahme willkürlicher Zahlenwerte zeigt befriedigende Übereinstimmung der Ergebnisse. Wir sehen nämlich aus den beiden Ausdrücken

$$2\pi S_1 = \pi K\left\{\frac{\pi}{2\varphi}\left(v_m - \frac{v_0 + v'_0}{2}\right) + h\,a\,(v_0 + v'_0)\right\}$$

und

$$\pi a^2 W = 2\,h\,a\,\pi K\left\{\frac{\cosh \beta l}{\cosh \beta l - 1}\left(v_m - \frac{v_0 + v'_0}{2}\right) + \frac{1}{2}(v_0 + v'_0)\right\},$$

daß das zweite Glied auf der rechten Seite gemeinsam ist, also haben wir zu vergleichen $\frac{\pi}{2\varphi}$ und $2\,h\,a \frac{\cosh \beta l}{\cosh \beta l - 1}$. Mit z. B. $a = 0{,}6$ cm, $l = 5$ cm, $h\,a = 0{,}004$, ergibt sich das Verhältnis $\frac{\pi}{4\,\varphi\,h\,a}\left(1 - \frac{1}{\cosh \beta l}\right) \sim 1$. Folglich ist die annähernde Berechnung mit der Gl. (11) statthaft, die bei Biegeversuchen benutzt wurde.

4. Bestimmung der Wärme bei der Drehschwingung. In der vorgehenden Berechnung wurde $h\,a$ als eine Konstante angesehen. Dies trifft im Falle der Drehschwingung nicht zu, wie schon bemerkt wurde. Deswegen haben wir erst $h\,a$ in Sonderversuchen zu ermitteln, und zwar als eine Funktion von z. Zur Berechnung von W wird wegen der Einfachheit die Gleichung der linearen Leitung genommen, wie bei der Biegung.

Um $h\,a$ zu bestimmen, wird ein Probestab nur an einem Ende von der Schwungradwelle der Maschine festgehalten, und das andere Ende steht frei. Es sind zwei Federn speziell für diesen Versuch vorgesehen, und sie üben die nötige Kraft unmittelbar auf die Schwungradwelle aus. Die Federkraft wird so reguliert, daß das Rad mit der gleichen Periode wie bei den Hauptversuchen schwingt. Auf diese Weise schwingt der Stab ohne Spannung, und abgesehen von der Wirkung der Stabmasse ist die Schwingungsweite überall konstant. Der Stab hat ein rundes Querloch außerhalb der Meßstrecke für die Temperaturbestimmung, und der elektrische Strom fließt durch den in diesem Loch liegenden Widerstanddraht. Also wird der Stab geheizt, und die Temperatur wird an drei Stellen der Oberfläche gemessen, nämlich an

beiden Enden und in der Mitte der Meßstrecke. Es sei durch l der Abstand der zwei benachbarten Meßstellen ausgedrückt; dann ist aus (11)

$$\cos \beta l = \frac{v_0 + v'_0}{2 v_m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

weil die Meßstrecke keine Wärmequelle enthält und $h a$ längs des Stabes als unveränderlich angesehen werden kann[5]). Dieser Versuch wird bei verschiedenen Schwingungsweiten ausgeführt, und es ergibt sich eine Beziehung zwischen $h a$ und dem Schwingungswinkel $\vartheta_{1\,\max}$, wie in Abb. 6 dargestellt ist.

Beim Hauptversuch verändert sich der Schwingungswinkel des Stabquerschnittes nach linearem Gesetz mit dem Abstand von einem bestimmten Querschnitt. Also ist das Gesetz, nach welchem $h a$ sich längs des Stabes verändert, von der obigen Kurve mit einem veränderten Maßstab für die Abszissenachse gegeben, welche jetzt die Länge z ausdrückt, und zwar gemessen von einem Ende der Meßstrecke. Abb. 6 zeigt beispielsweise die Achse für z, welche für den Fall $2\,\vartheta_{1\,\max} = 0{,}1$ gilt. Eine empirische Gleichung mit drei Konstanten b, c, a gibt die Versuchswerte sehr genau wieder, nämlich

$$h a = c - b\, e^{-\alpha z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13).$$

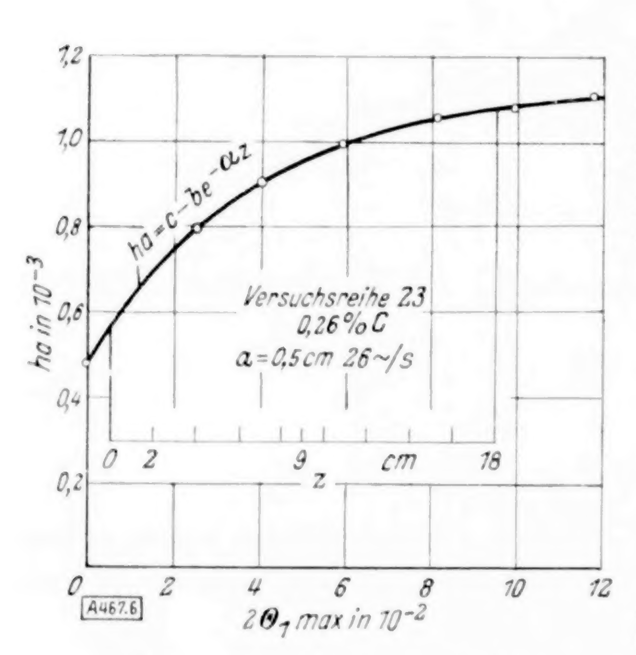


Abb. 6. Versuchswerte von $h a$.

Im vorliegenden Versuch beträgt der Durchmesser $2\,a$ des Stabes 10 mm, und die Länge des zylindrischen Teiles ist gleich 200 mm. Für Flußeisen findet man die Schwingungszahl pro Sekunde annähernd gleich 26. Die Zahlenwerte von b, c, α, welche in der folgenden Berechnung benutzt werden, sind in der Tabelle zusammengestellt.

Zahlenwerte von b, c, α.

$2\,\vartheta_{1\,\max}$	α	$b \cdot 10^3$	$c \cdot 10^3$
0,08	0,119*	0,532*	1,132*
0,08	0,112	0,579	1,120
0,10	0,137	0,567	1,125

Die Zahlen mit Sternchen sind nur zur Ermittlung von q für Stab Nr. 7 der nachstehenden Tabelle benutzt.

Mit der Formel (13) ist die Gleichung der Wärmeleitung wie folgt:

$$\frac{d^2 v}{d z^2} - \frac{2}{a^2}(c - b\, e^{-\alpha z})\, v + \frac{W}{K} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

wobei W als eine Konstante betrachtet werden kann.

Man setze

$$x = \frac{b}{c}\, e^{-\alpha z} \quad \text{und} \quad n^2 = \frac{8\, c}{a^2\, \alpha^2};$$

dann wird (14)

$$x^2 \frac{d^2 v}{d x^2} + x \frac{d v}{d x} - \frac{n^2}{4}(1 - x)\, v + \frac{W}{K\, \alpha^2} = 0 .$$

Wieder setze man

$$\xi = n \sqrt{x};$$

dann folgt

$$\xi^2 \frac{d^2 v}{d \xi^2} + \xi \frac{d v}{d \xi} + (\xi^2 - n^2)\, v + \frac{4\, W}{K\, \alpha^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich in der Form $\sum_{s=0}^{\infty} C_{2s}\, \xi^{2s}$ ausdrücken, und zwar mit den Beziehungen

$$C_0 = \frac{4\, W}{K\, \alpha^2\, n^2} = \frac{W\, a^2}{2\, c\, K}, \qquad (4\, s^2 - n^2)\, C_{2s} = -\, C_{2s-2}$$

[5]) Die Gl. (12) wurde schon vorher bei Biegeversuchen benutzt.

für $n^2 \neq 4 s^2$. Folglich ist die allgemeine Lösung wie folgt:

$$v = A\, J_n(\xi) + B\, J_{-n}(\xi) + \frac{W a^2}{2\, c\, K}\varphi(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

mit

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{4 - n^2} + \frac{\xi^4}{(4 - n^2)(16 - n^2)} - \frac{\xi^6}{(4 - n^2)(16 - n^2)(36 - n^2)} + \cdots$$

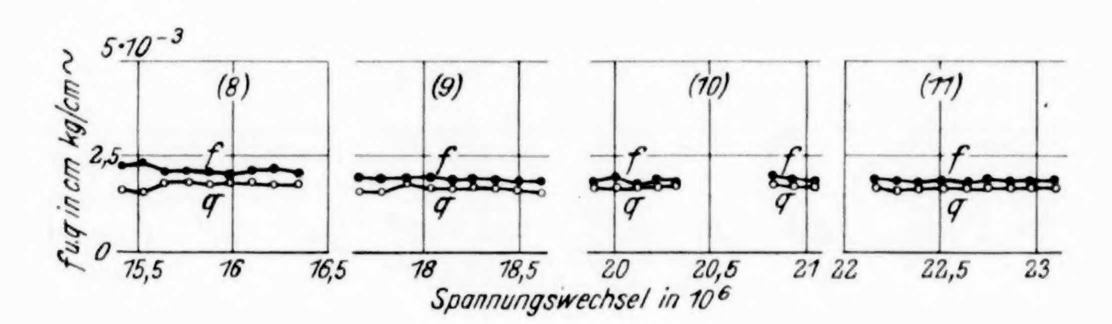
Dabei ist $J_n(\xi)$ wieder die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung n, welche als nicht ganzzahlig angenommen ist.

Die Temperaturmessung geschieht nun an drei Stellen (ξ_1, ξ_2, ξ_3) der Staboberfläche, und es sei durch v_1, v_2, v_3 der betreffende Temperaturunterschied zwischen dem Stab und der umgebenden Luft gegeben. Dann haben wir drei Gleichungen mit den drei Unbekannten A, B, W; insbesondere sei die letztgenannte Größe berechnet, nämlich

$$\frac{W a^2}{2\, c\, K} = \frac{\Delta'}{\Delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

wobei

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_n(\xi_1) & J_{-n}(\xi_1) & \varphi(\xi_1) \\ J_n(\xi_2) & J_{-n}(\xi_2) & \varphi(\xi_2) \\ J_n(\xi_3) & J_{-n}(\xi_3) & \varphi(\xi_3) \end{vmatrix}, \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} J_n(\xi_1) & J_{-n}(\xi_1) & v_1 \\ J_n(\xi_2) & J_{-n}(\xi_2) & v_2 \\ J_n(\xi_3) & J_{-n}(\xi_3) & v_3 \end{vmatrix}.$$



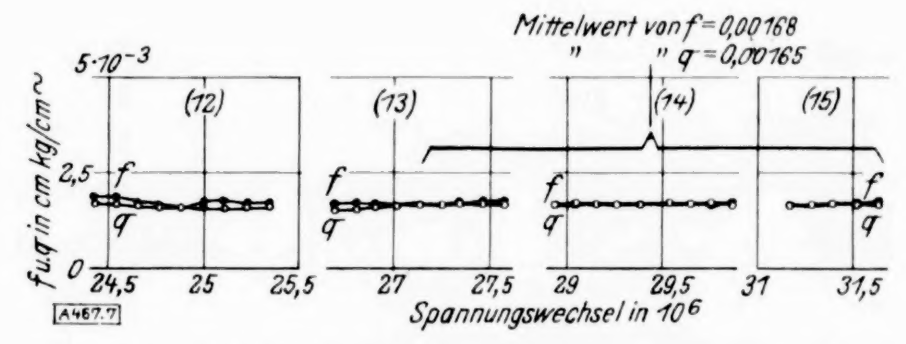
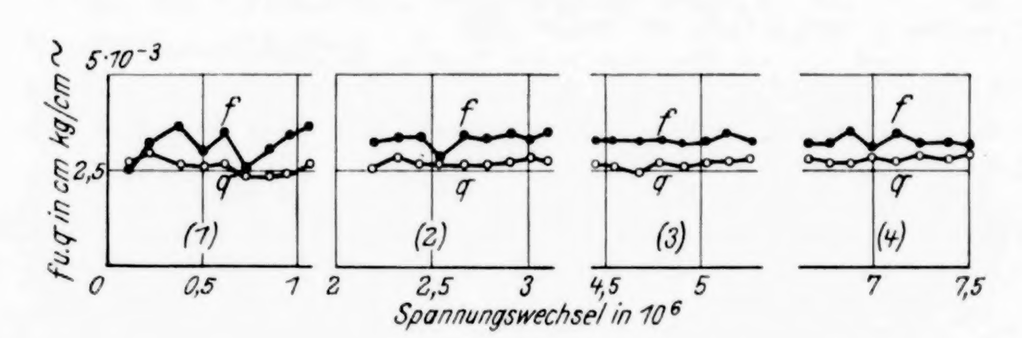


Abb. 7. Versuchsreihe 23, Torsion, Stab Nr. 11.

Spannungsgrenzen = ± 7,5 kg/mm², Raumtemperatur = 30,6° – 30,9° C.



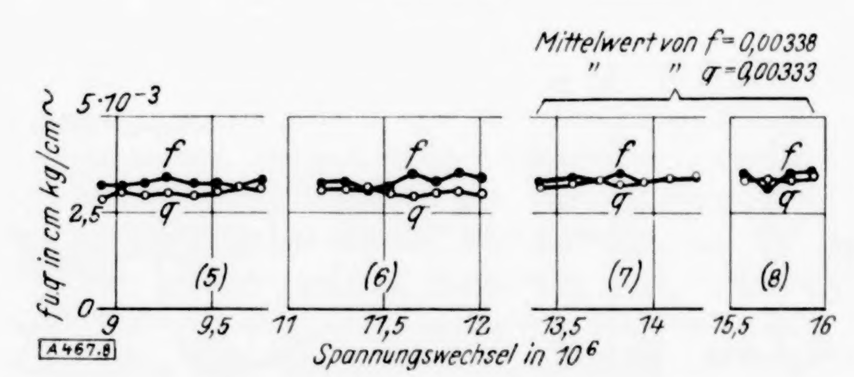


Abb. 8. Versuchsreihe 23, Torsion, Stab Nr. 8.

Spannungsgrenzen = ± 9,3 kg/mm², Raumtemperatur = 30,2° – 30,5° C.

Schließlich haben wir das mechanische Äquivalent der Wärme in cm kg in bezug auf ein Zentimeter der Stablänge und eine Periode der Schwingung, d. h.

$$q = 42{,}7\,\pi\,a^2\,W\,T \quad \ldots \quad (18),$$

(a in cm, W in cal/cm³sk, T in sk).

Versuchsergebnisse. Eine Reihe der Versuche an Flußeisenstäben mit 0,26% C im ausgeglühten Zustande wurde ausgeführt. Die Zugfestigkeit des Materials = 4845 kg/cm²; die Bruchdehnung = 29,4%. Die Kurve von $h\,a$ ist schon in Abb. 6 gegeben, während einige Beispiele der Versuchsergebnisse in Abb. 7 und Abb. 8 dargestellt sind. Das erste Beispiel, Stab Nr. 11, bezieht sich auf den Fall der Randschubspannung = 7,5 kg/mm², und das zweite, Stab Nr. 8, auf den Fall der Spannung = 9,3 kg/mm². In beiden Fällen war f erst mehr oder weniger größer als q, und die beiden wurden angenähert gleich nach einem Spannungswechsel von über zehn (Stab Nr. 8) bzw. zwanzig (Stab Nr. 11) Millionen. Die Schwingungszahl pro Min. war 1553 (Nr. 8) bzw. 1562 (Nr. 11), und jeder Versuch erstreckte sich auf eine Dauer von mehreren Tagen.

Der Drehschwingungsversuch wurde in einer besonderen Kammer ausgeführt, wo die Raumtemperatur mit automatisch regulierbaren Heizapparaten ungefähr konstant gehalten war.

Die Mittelwerte von f und q im Zustande, wo die beiden ungefähr übereinstimmen, lauten wie folgt:

Versuchsreihe 23.

Stab Nr.	Max. Schubspannung kg/mm²	$f \cdot 10^3$ cm kg/cm ∼	$q \cdot 10^3$ cm kg/cm ∼	Raumtemperatur während der ganzen Versuchsdauer °C
7	7,5	1,93	2,01	30,8—30,9
9	7,6	2,70	2,72	30,9—31,0
11	7,5	1,68	1,65	30,6—30,9
—	—	—	—	—
8	9,3	3,38	3,33	30,2—30,5
12	9,4	3,09	3,09	30,9—31,0

Der Stab Nr. 9 wurde vorher in höheren Spannungsgrenzen, nämlich zuerst von ± 10,3 kg/mm² und dann von ± 9,3 kg/mm² geprüft; deshalb sind f und q höher als bei den Stäben Nr. 7 und Nr. 11. Der Stab Nr. 12, welcher auch vorher höheren Spannungen (± 11,3 kg/mm²) ausgesetzt war, wurde in Öl von der Temperatur 107° geheizt, um den Einfluß der früheren Spannung möglichst zu beseitigen.

Ferner ist noch zu bemerken, daß bei dem Versuch von Stab Nr. 7 die Stabtemperatur und die Lufttemperatur getrennt beobachtet wurden, während bei anderen Versuchen der Temperaturunterschied zwischen den beiden unmittelbar bestimmt wurde.

Bei Ausführung der Versuche und numerischen Berechnungen waren die Herren T. Ishibashi, R. Iwasaki und H. Oho tätig; an dieser Stelle sei diesen Herren bestens gedankt.

Zusammenfassung. Im Zusammenhang mit Dauerbiegeversuchen sind Drehschwingungsversuche geschildert. Die mechanische Arbeit und die Wärmeenergie lassen sich bei Stäben, die eine Drehschwingung ausführen, ermitteln. Den beiden Versuchen ist das folgende Ergebnis gemeinsam. Bei geringerer Anzahl der Spannungswechsel ist die mechanische Arbeit im allgemeinen größer als die entwickelte Wärmeenergie; diese Tatsache zeigt die Strukturveränderung des Materials. Bei genügend großer Anzahl derselben werden die mechanische Arbeit und die Wärmeenergie beinahe gleich (das ist sozusagen ein stationärer Zustand des Materials), vorausgesetzt, daß die Spannung mäßig ist. Die Tatsache, daß ein Unterschied zwischen den beiden Arten der Energie entstehen kann, deutet darauf hin, daß man die sogenannte Dämpfungszahl etwas genauer betrachten muß.

Berechnung der Fehler von Rechenstabrechnungen.

Von *Hans A. Ristau* in Hamburg.

Die vorliegende Arbeit soll zeigen, wie der Fehler, der bei einer beliebigen Rechenstabrechnung zu erwarten ist, berechnet werden kann.

Im Gegensatz zu den bisher bekannten Methoden[1]), die nur den Einschätzfehler berücksichtigen, soll hier ein vollständiger Überblick über die möglichen Fehler und ihren Einfluß auf das Ergebnis der Rechnung gewonnen werden.

1. Beschreibung einer Rechenstabrechnung durch Symbole.

Zur Erleichterung der Darstellung werden Symbole eingeführt für die Grundverrichtungen, die mit einem Rechenstab vorgenommen werden können.

Die einzelnen Funktionsleitern des Rechenstabes seien durch Buchstaben (M, N, ...) oder andere Zeichen gekennzeichnet.

Die Grundverrichtungen sind:

1. Die Zunge wird so verschoben, daß der Teilstrich n der Leiter N auf der Zunge mit dem Teilstrich m der Leiter M auf dem Stab zusammenfällt (s. Abb. 1). Das Symbol hierfür sei:

$$\frac{\rightarrow N\ n}{M\ m} \quad \text{oder} \quad \frac{M\ m}{\rightarrow N\ n},$$

wobei die Leitern M, N nicht unmittelbar nebeneinander zu liegen brauchen. $\rightarrow$ bedeutet, daß die Zunge verschoben wird. Die beiden folgenden Zeichen derselben Zeile geben an, welche Funktionsleiter und welcher Teilstrich auf der Zunge beachtet werden; unter oder über diesen beiden Zeichen stehen die entsprechenden Angaben für den Stab.

Im allgemeinen wird bei dieser Grundverrichtung der Läufer benutzt, ein L in der oberen Zeile bringt dies besonders zum Ausdruck:

$$\frac{\rightarrow N\ n\ L}{M\ m} \quad \text{(s. Abb. 2).}$$

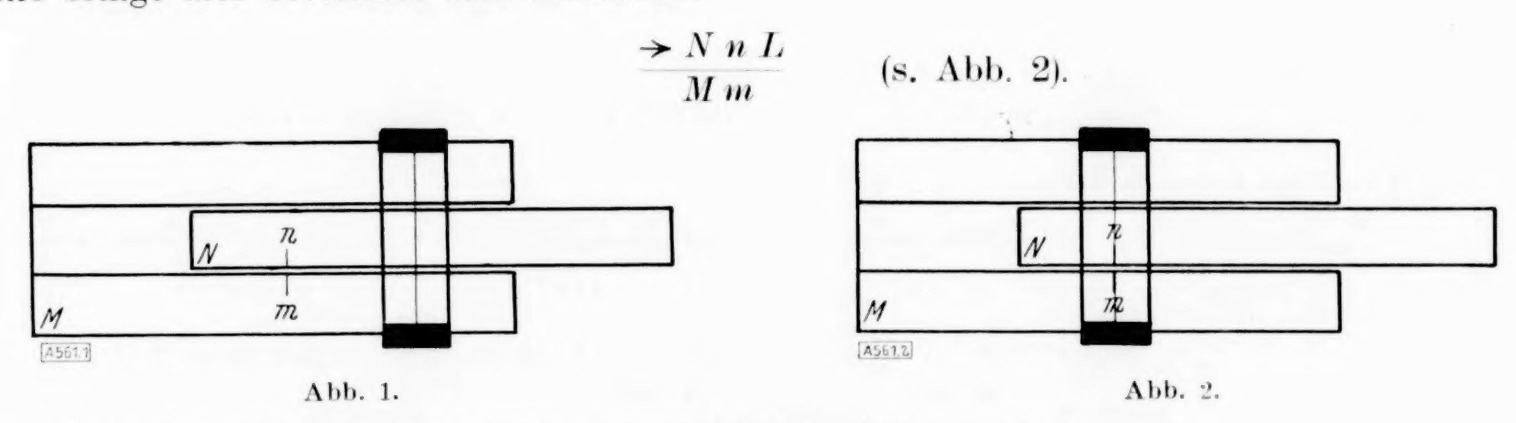


Abb. 1. Abb. 2.

Ein $[L]$ in der oberen Zeile betont, daß der Läufer nicht benutzt wird.

Es wird auch dann von einem zur Zahl n gehörigen Teilstrich gesprochen, wenn keiner der Teilstriche der Leiter N mit n beziffert ist; die Lage dieses Teilstriches muß dann zwischen zwei gezeichneten Teilstrichen eingeschätzt werden. Im Symbol soll eine Klammer um n diesen Sachverhalt ausdrücken. Z. B.

$$\frac{\rightarrow N\ (n)\ L}{M\ m} \quad \text{(s. Abb. 3).}$$

2. Es wird abgelesen, welcher Teilstrich der Leiter M dem Teilstrich n der Leiter N gegenübersteht. Ist das Ergebnis x, so sei das Symbol:

$$\frac{N\ n \quad L}{M\ |\ (x)} \quad \text{(s. Abb. 4).}$$

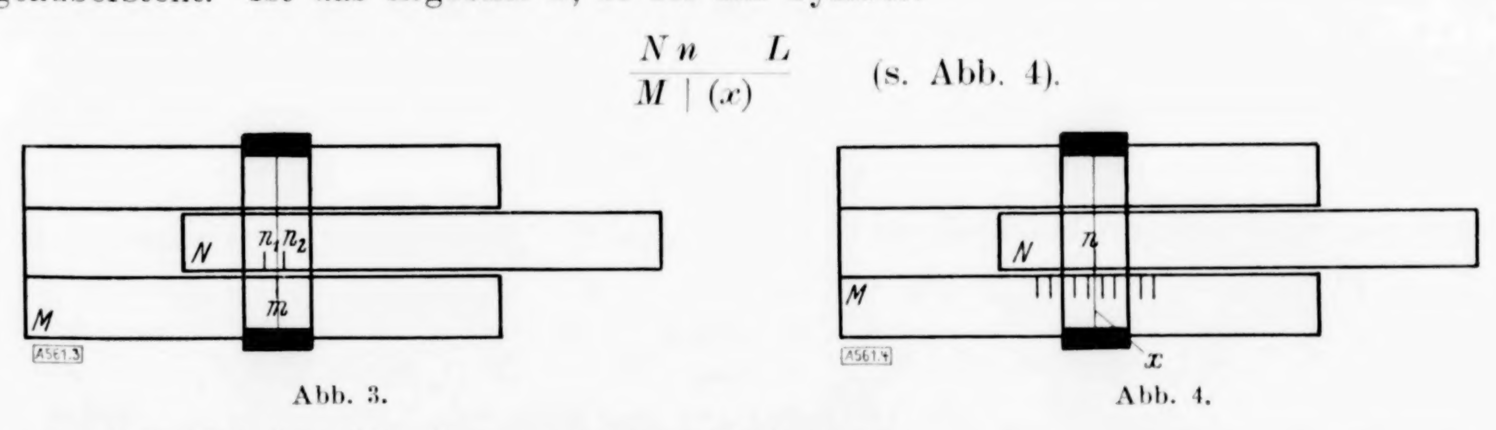


Abb. 3. Abb. 4.

L, $[L]$, $(\,)$ haben die oben angegebene Bedeutung.

[1]) Vgl. etwa A. Vogler: Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln (1877), § 23, S. 71. — Ph. Lötzbeyer: Theorie und Praxis der Tafeln und des Tafelrechnens (1934), § 25, S. 54.

Beispiele für die Anwendung der Symbole.

Die Teilungen des Rechenstabes „System Rietz Nr. 23" der Firma Albert Nestler A. G. sollen wie folgt gekennzeichnet werden:

$z = 250 \cdot n$ mm	$\log N$	
$z = 250 \cdot \log n$ mm	N	
$z = 250 \cdot \log n$ mm	N'	Oberseite der Zunge
$z = 250 \cdot (1 - \log n)$ mm	$(1/N)'$	Oberseite der Zunge
$z = (250/2) \cdot \log n$ mm	$(N^2)'$	Oberseite der Zunge
$z = (250/2) \cdot \log n$ mm	N^2	
$z = (250/3) \cdot \log n$ mm	N^3	
$z = 250 \cdot (1 + \log \operatorname{tang} \alpha)$ mm	T'	Unterseite der Zunge
$z = 250 \cdot \left(2 + \log \begin{matrix}\sin \\ \operatorname{tang}\end{matrix} \alpha\right)$ mm	$(S$ u. $T)'$	Unterseite der Zunge
$z = 250 \cdot (1 + \log \sin \alpha)$ mm	S'	Unterseite der Zunge

Die mit ′ gezeichneten Teilungen befinden sich auf der Zunge.

Die Multiplikation zweier Zahlen a, b kann auf drei verschiedene Arten ausgeführt werden; diese werden durch die Symbole so beschrieben:

$$1.\quad \frac{\to N'\ 1\ [L]}{N\ (a)}\,, \qquad \frac{N'\ (b)\qquad L}{N\ \mid\ (a\cdot b)}\,;$$

$$2.\quad \frac{\to (1/N)'\ (b)\ L}{N\quad (a)}\,, \qquad \frac{(1/N)'\ 1\qquad [L]}{N\ \mid\ (a\cdot b)}\,;$$

$$3.\quad \frac{N^2\ (a)\ [L]}{\to (N^2)'\ 1}\,, \qquad \frac{N^2\ \mid\ (a\cdot b)\ L}{(N^2)'\ (b)}\,.$$

Die Division beschreiben:

$$1.\quad \frac{\to N'\ (b)\ L}{N\ (a)}\,, \qquad \frac{N'\ 1\qquad [L]}{N\ \mid\ (a/b)}\,;$$

$$2.\quad a \geqq b\quad \frac{\to N'\ 1\ [L]}{N\ (b)}\,, \qquad \frac{N'\ \mid\ (a/b)\ L}{N\ (a)}\,,$$

$$3.\quad a \leqq b\quad \frac{\to N'\ 10\ [L]}{N\ (b)}\,, \qquad \frac{N'\ \mid\ (a/b)\ L}{N\ (a)}\,.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Zahlen a, b zwischen 1,000 und 10,00 liegen.

Mit den Leitern N, $(1/N)'$ oder N^2, $(N^2)'$ läßt sich die Division in der gleichen Weise durchführen.

Die Ablesung der Logarithmen, reziproken Werte, Quadrate und Kuben beschreiben:

$$\frac{N\ (a)\qquad L}{\log N\ \mid\ (\log a)}\,, \qquad \frac{(1/N)'\ \mid\ (1/a)\ L}{N'\ (a)}\,,$$

$$\frac{N^2\ \mid\ (a^2)\ L}{N\ (a)}\,, \qquad \frac{N^3\ \mid\ (a^3)\ L}{N\ (a)}\,.$$

Ablesung von tang und sin beschreiben:

$$\frac{T'\ (a)\qquad L}{N\ \mid\ (\operatorname{tang} a)}\,, \qquad \frac{(S\text{ u. }T)'\ (a)\qquad L}{N\ \mid\ \begin{pmatrix}\operatorname{tang} \\ \sin\end{pmatrix} a}\,, \qquad \frac{S'\ (a)\qquad L}{N\ \mid\ \sin a)}\,.$$

Eine Aufgabe, die sehr häufig mit dem Rechenstab gelöst wird und die auch als Fundamentalaufgabe gelten kann, ist die Bestimmung der 4. Proportionalen.

$$a : b = c : x\,, \qquad x = c \cdot b/a\,.$$

Durch die Symbole wird diese Rechnung so beschrieben:

$$\frac{\to N'\ (b)\ L}{N\ (a)},\quad \frac{N'\ |\ (x)\ L}{N\ (c)};$$

oder

$$\frac{\to N'\ (b)\ L}{N\ (a)},\quad \frac{\overset{10}{N'\ 1}}{\to L},\quad \frac{\overset{1}{\to N'\ 10}}{L},\quad \frac{N'\ |\ (x)\ L}{N\ (c)},$$

wenn die Zunge um ihre ganze Länge durchgeschoben werden muß.

$$\frac{N^2\ \ (a)\ L}{\to (N^2)'\ (b)},\quad \frac{N^2\ (c)}{(N^2)'\ |\ (x)\ L}.$$

2. Zergliederung des Fehlers.

A. Die Elementarfehler.

Für den Fehler im Ergebnis einer Rechenstabrechnung sind zwei Ursachen verantwortlich zu machen, die Ungenauigkeit des Rechenstabes und die Unvollkommenheit des Rechners[2]).

a) Der Lagefehler.

Die Teilungen des Rechenstabes sind mit Fehlern behaftet. Der mit n bezifferte Strich der Leiter N liegt nicht an der vorgeschriebenen Stelle, er weicht von dieser, seiner wahren Lage, um die Strecke $\varepsilon(N, n)$ ab[3]) (s. Abb. 5). Für den Betrag von ε wird sich eine obere Schranke angeben lassen

$$|\varepsilon| \leqq e.$$

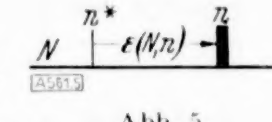


Abb. 5.
n^* wahre Lage
n angegebene Lage
ε Lagefehler

Die Größe e wird von der Herstellungsart der Leiter, dem Material des Trägers, der Benutzungsdauer usw. abhängen.

Für e habe ich folgende Werte ermittelt: Teilung als Präzisionsteilung auf einer Teilmaschine hergestellt und längere Zeit im Gebrauch

$$e = 0{,}03 \text{ mm}.$$

Teilung auf einem guten Zeichenpapier gezeichnet oder sorgfältig gedruckt

$$e = 0{,}1 \text{ mm}.$$

Teilung auf gedrucktem Funktionalpapier gezeichnet

$$e = 0{,}2 \text{ mm}.$$

b) Der Abrundungsfehler.

Nun kann es vorkommen, daß keiner der Teilstriche der Leiter N mit n bezeichnet ist, daß es aber auf ihr zwei benachbarte Teilstriche n_1, n_2 gibt, so daß $n_1 < n < n_2$. Im allgemeinen können zwischen n_1, n_2 9 Teilstriche eingeschätzt werden, dann wird n durch Abrundung auf die Form

$$n' = n_1 + k(n_2 - n_1)$$

gebracht, wo k eine der Zahlen 0,0, 0,1, 0,2, ..., 1,0 ist. Der zu n' gehörige wahre Teilstrich weicht jetzt von dem zu n gehörigen wahren Teilstrich um den Abrundungsfehler α ab. $z = z(n)$ sei die Gleichung der Leiter N, dann ist

$$\alpha = z(n') - z(n)\ ^{4})$$

und nach dem Mittelwertsatz

$$\alpha = z'(\xi)\cdot(n' - n),$$

wobei ξ zwischen n und n' liegt. Nun ist aber

$$|n' - n| \leqq \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\,(n_2 - n_1)$$

und daher

$$|\alpha| \leqq |z'(\xi)|\cdot(n_2 - n_1)/20 = \mathfrak{a}.$$

[2]) Die groben Fehler, die gelegentlich vorkommen, sind von der Betrachtung ausgeschlossen.
[3]) Als Lage eines Teilstriches gilt die Mitte des Striches.
[4]) Der Abrundungsfehler ist kein zufälliger Fehler, er kann für jeden Einzelfall berechnet werden!

Ist Δ der Abstand der Teilstriche n_1, n_2, so ist

$$\Delta = z(n_2) - z(n_1) = z'(\eta) \cdot (n_2 - n_1), \quad n_1 < \eta < n_2,$$

d. h.

$$\mathfrak{a} \approx \Delta/20.$$

Nur wenn z' im Bereich $n_1 \leq n \leq n_2$ seinen Wert erheblich ändert, braucht die Beziehung nicht zu stimmen.

Für die Leiter $\log N$ ($z = 250 \cdot n$ mm) des auf S. 34 betrachteten Rechenstabes ist

$$z'(n) = 250 \text{ mm}, \quad n_2 - n_1 = 0{,}002,$$

daher

$$\mathfrak{a} = 250 \cdot 0{,}002/20 \text{ mm} = 0{,}025 \text{ mm}.$$

Für die logarithmischen Leitern dieses Rechenstabes ist

$$\Delta_{\max} = 1{,}4 \text{ mm},$$

also

$$\mathfrak{a}_{\max} = 0{,}07 \text{ mm}.$$

Der Interpolationsfehler.

Ist $k \neq 0{,}0$ und $k \neq 1{,}0$, so wird der zu n' gehörige Teilstrich durch Einschätzung gefunden. Diese Einschätzung, die das Auge vornimmt, ist eine lineare Interpolation; d. h. das Auge sucht statt des Teilstriches mit der Koordinate

$$z(n_1 + k(n_2 - n_1))$$

den Teilstrich mit der Koordinate $\quad z(n_1) + k[z(n_2) - z(n_1)]$

auf. Ist $z = z(n)$ keine lineare Funktion, so entsteht ein Interpolationsfehler

$$\beta = [z(n_1) + k(z(n_2) - z(n_1))] - z(n')\ ^{5)}.$$

Es ist

$$\beta = k \cdot [z(n_2) - z(n_1)] - [z(n') - z(n_1)],$$

oder wenn beide Klammern nach Taylor entwickelt werden:

$$\beta = k \cdot [z'(n_1) \cdot (n_2 - n_1) + z''(n_1) \cdot (n_2 - n_1)^2/2 + \ldots]$$
$$- [z'(n_1) \cdot k(n_2 - n_1) + z''(n_1) \cdot k^2 (n_2 - n_1)^2/2 + \ldots],$$

$$\beta = k(1-k) \cdot z''(n_1) \cdot (n_2 - n_1)^2/2 + \ldots .$$

Für die üblichen logarithmischen Leitern $z = E \cdot \log n$ ($E = 250$ mm, $E = 125$ mm) soll der Interpolationsfehler abgeschätzt werden. Wird die Reihe für β nach dem ersten nicht verschwindenden Glied abgebrochen und das Restglied hinzugefügt, so entsteht:

$$\beta = -k(1-k)(E/4{,}60)(n_2 - n_1)^2/n_1^2$$
$$+ k(E/6{,}90)(n_2 - n_1)^3 \left(\frac{1}{\xi'^3} - \frac{k^2}{\xi''^3}\right),$$

wobei ξ' und ξ'' zwischen n_1 und n_2 liegen.

Nun ist $k(1-k) \leq 0{,}25$ und auf der Teilung $E = 250$ mm, die bei $n = 4$ am gröbsten ist,

$$(n_2 - n_1)/n_1 \leq 5 \cdot 10^{-2}/4 = 1{,}25 \cdot 10^{-2},$$

daher

$$|\beta| \leq 2{,}13 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-5} \text{ mm} = b.$$

Auf der Teilung $E = 125$ mm, die bei $n = 2$ am gröbsten ist, ist

$$(n_2 - n_1)/n_1 \leq 5 \cdot 10^{-2}/2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2},$$

somit

$$|\beta| \leq 4{,}25 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = b.$$

Der Einschätzfehler.

Infolge der Unvollkommenheit des Rechners wird bei der Einschätzung ein Einschätzfehler γ auftreten. Wenn 9 Zwischenlagen eingeschätzt werden können, so wird $\Delta/10 = g$ eine obere Schranke der $|\gamma|$ sein. Für die üblichen logarithmischen Leitern ist

$$g_{\max} = 1{,}4/10 \text{ mm} = 0{,}14 \text{ mm}.$$

[5] Auch der Interpolationsfehler ist kein zufälliger Fehler!

Einfluß der Lagefehler.

Ferner ist zu beachten, daß schon die Teilstriche n_1, n_2 mit Lagefehlern $\varepsilon(N, n_1)$, $\varepsilon(N, n_2)$ behaftet sind. Diese bewirken beim eingeschätzten Strich den Fehler

$$\varepsilon(N, n_1) + k \cdot (\varepsilon(N, n_2) - \varepsilon(N, n_1)).$$

Gesamtfehler beim eingeschätzten Teilstrich.

Der eingeschätzte Teilstrich n weicht also von seiner wahren Lage um eine Strecke

$$\varrho = \alpha + \beta + \gamma + (1 - k)\,\varepsilon(N, n_1) + k \cdot \varepsilon(N, n_2)$$

ab. Es ist

$$|\varrho| \leqq r = \mathfrak{a}_{\max} + b + g_{\max} + e.$$

Für die Teilungen der üblichen logarithmischen Rechenstäbe mit $E = 250$ mm ist:

$$r = 0{,}07 + 0{,}002 + 0{,}14 + 0{,}03 \text{ mm},$$

$$r = 0{,}25 \text{ mm}.$$

Für die Teilungen der üblichen logarithmischen Rechenstäbe mit $E = 125$ mm ist:

$$r = 0{,}07 + 0{,}004 + 0{,}14 + 0{,}03 \text{ mm},$$

$$r = 0{,}25 \text{ mm}.$$

c) Der Einstellfehler.

Infolge der Unvollkommenheit des Rechners kommen bei den Grundverrichtungen

$$\frac{\rightarrow N\,n}{M\,m}, \quad \frac{N\,n}{\rightarrow L}$$

die beiden Striche nicht genau zur Deckung. Der Fehler wird durch die Strecke δ angegeben (s. Abb. 6, 7).

d sei die obere Grenze der $|\delta|$. d ist im allgemeinen gleich der Sehschwelle des Rechners, nur bei sehr dicken Teilstrichen und sonstigen ungünstigen Verhältnissen ist d entsprechend größer.

In dieser Arbeit wird für d der für die Sehschwelle übliche Wert benutzt:

$$d = 0{,}05 \text{ mm}.$$

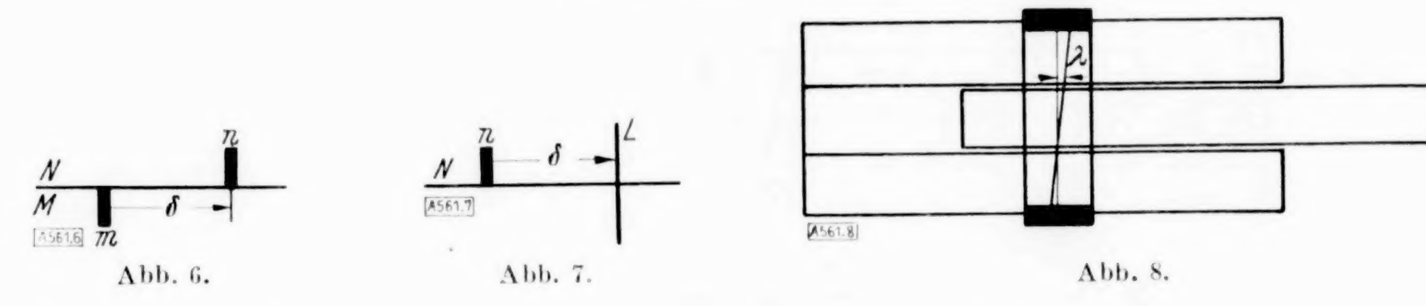


Abb. 6. Abb. 7. Abb. 8.

d) Der Läuferfehler.

Eine weitere Fehlerquelle liegt in der Benutzung des Läufers; der Läuferstrich ist nicht ganz gerade oder steht schief zu den Teilungen, die Parallelverschiebung ist nicht genau usw. Wird der Läufer benutzt, um zwei Teilungen, die nicht benachbart sind, miteinander in Beziehung zu bringen, so werden sich diese Fehler bemerkbar machen. Die so verursachte Fehlerstrecke soll mit λ bezeichnet werden (s. Abb. 8).

Es sei

$$|\lambda| \leqq l.$$

Für einen Präzisionsrechenstab kann man annehmen:

$$l = 0{,}05 \text{ mm}.$$

B. Aufspaltung des Fehlers bei einer Grundverrichtung in Elementarfehler.

a) Wird die Grundverrichtung $\frac{\rightarrow N\,n\,[L]}{M\,m}$ ausgeführt[6]), so weicht die Zunge des Rechenstabes von ihrer wahren Lage um eine Strecke φ ab. Der Streckenplan (Abb. 9) zeigt, wie sich φ aus den Elementarfehlern aufbaut.

[6]) Die Leitern N, M liegen hier also aneinander, und n, m sind durch Teilstriche gekennzeichnet.

$$\frac{\rightarrow N\ \ n\ \ [L]}{M\ \ m} \qquad \varphi = \delta_M + \varepsilon(M, m) - \varepsilon(N, n)\,.$$

Abb. 9.

Die im Streckenplan mit n, m bezeichneten Striche liegen auf dem Rechenstab gezeichnet vor, während n^*, m^* die wahre Lage dieser Striche angeben.

b) In gleicher Weise können die Fehler, die bei der Ausführung der anderen Grundverrichtungen entstehen, auf die Elementarfehler zurückgeführt werden.

$$\frac{\rightarrow N\ \ n\ \ L}{M\ \ m} \qquad \varphi = \delta_M - \delta_N + \varepsilon(M, m) - \varepsilon(N, n) + \lambda\,.$$

Abb. 10.

c) $$\frac{\rightarrow N\ \ n\ \ [L]}{M(m)} \qquad \varphi = \varrho_M - \varepsilon(N, n)\,.$$

Abb. 11.

d) $$\frac{\rightarrow N\ \ n\ \ L}{M(m)} \qquad \varphi = \varrho_M - \delta_N - \varepsilon(N, n) + \lambda\,.$$

Abb. 12.

e) $$\frac{\rightarrow N(n)\,[L]}{M\ \ m} \qquad \varphi = -\varrho_N + \varepsilon(M, m)\,.$$

Abb. 13.

f) $$\frac{\rightarrow N(n)\ \ L}{M\ \ m} \qquad \varphi = -\varrho_N + \delta_M + \varepsilon(M, m) + \lambda\,.$$

Abb. 14.

g) $$\frac{\rightarrow N(n)\ \ L}{M(m)} \qquad \varphi = \varrho_M - \varrho_N + \lambda\,.$$

Abb. 15.

h) $$\frac{N\ \ n\ \ \ [L]}{M\ \ |\ (x)} \qquad \psi = \varphi - \varrho_M + \varepsilon(N, n)\,.$$

Abb. 16.

Wenn eine der beiden Leitern auf der Zunge liegt, so soll diese mit N bezeichnet werden. n^{**} gibt die Lage von n^* an, wenn die Zunge fehlerfrei eingestellt ist. ψ ist die Fehlerstrecke des Ergebnisses der Ablesung.

i) $\dfrac{N\ \ n\ \ \ \ L}{M\ \mid\ (x)}$ $\qquad \psi = \varphi - \varrho_M + \delta_N + \varepsilon(N, n) - \lambda\,.$

Abb. 17.

j) $\dfrac{N(n)\ \ \ \ L}{M\ \mid\ (x)}$ $\qquad \psi = \varphi + \varrho_N - \varrho_M - \lambda\,.$

Abb. 18.

k) $\dfrac{N\ \mid\ (x)\,[L]}{M\ m}$ $\qquad \psi = -\varphi - \varrho_N + \varepsilon(M, m)\,.$

Abb. 19.

l) $\dfrac{N\ \mid\ (x)\ \ L}{M\ m}$ $\qquad \psi = -\varphi - \varrho_N + \delta_M + \varepsilon(M, m) + \lambda\,.$

Abb. 20.

m) $\dfrac{N\ \mid\ (x)\ L}{M(m)}$ $\qquad \psi = -\varphi + \varrho_M - \varrho_N + \lambda\,.$

Abb. 21.

n) $\dfrac{\rightarrow\ \ L}{M\ \ m}$ $\qquad \varphi_L = \delta_M + \varepsilon(M, m)\,.$

Abb. 22.

o) $\dfrac{\rightarrow\ \ L}{M\ (m)}$ $\qquad \varphi_L = \varrho_M\,.$

Abb. 23.

p) $\dfrac{N\ \ n}{\rightarrow\ \ L}$ $\qquad \varphi_L = \varphi + \delta_N + \varepsilon(N, n)\,.$

Abb. 24.

q) $\frac{N\ (n)}{\to L}$ $\qquad \varphi_L = \varphi + \varrho_N\,.$

Abb. 25.

r) $\frac{\to N\ \ n}{L}$ $\qquad \varphi = \varphi_L - \delta_N - \varepsilon(N, n)\,.$

Abb. 26.

s) $\frac{\to N\ (n)}{L}$ $\qquad \varphi = \varphi_L - \varrho_N\,.$

Abb. 27.

Wird in den Symbolen und daher auch in den Streckenplänen oben und unten vertauscht, so ändert sich nichts an der Beziehung zwischen den Fehlern.

Aufspaltung eines Fehlers bei einer Grundverrichtung in Elementarfehler.

	Grundverrichtung	Die Fehlerstrecke bei dieser Grundverrichtung setzt sich wie folgt aus den Elementarfehlern zusammen:
a)	$\frac{\to N\ n\ [L]}{M\ m}$, $\frac{M\ m\ [L]}{\to N\ n}$	$\varphi = \delta_M + \varepsilon(M, m) - \varepsilon(N, n)$
b)	$\frac{\to N\ n\ \ L}{M\ m}$, $\frac{M\ m\ \ L}{\to N\ n}$	$\varphi = \delta_M - \delta_N + \varepsilon(M, m) - \varepsilon(N, n) + \lambda$
c)	$\frac{\to N\ n\ [L]}{M(m)}$, $\frac{M(m)[L]}{\to N\ n}$	$\varphi = \varrho_M - \varepsilon(N, n)$
d)	$\frac{\to N\ n\ \ L}{M(m)}$, $\frac{M\ (m)\ L}{\to N\ n}$	$\varphi = \varrho_M - \delta_N - \varepsilon(N, n) + \lambda$
e)	$\frac{\to N(n)[L]}{M\ m}$, $\frac{M\ m\ [L]}{\to N(n)}$	$\varphi = -\varrho_N + \varepsilon(M, m)$
f)	$\frac{\to N(n)\ \ L}{M\ m}$, $\frac{M\ m\ \ L}{\to N\ (n)}$	$\varphi = -\varrho_N + \delta_M + \varepsilon(M, m) + \lambda$
g)	$\frac{\to N\ (n)\ \ L}{M(m)}$, $\frac{M(m)\ L}{\to N\ (n)}$	$\varphi = \varrho_M - \varrho_N + \lambda$
h)	$\frac{N\ n\ \ \ [L]}{M \mid (x)}$, $\frac{M \mid (x)\ [L]}{N\ n}$	$\psi = \varphi - \varrho_M + \varepsilon(N, n)$
i)	$\frac{N\ n\ \ \ L}{M \mid (x)}$, $\frac{M \mid (x)\ L}{N\ n}$	$\psi = \varphi - \varrho_M + \delta_N + \varepsilon(N, n) - \lambda$
j)	$\frac{N(n)\ \ \ L}{M \mid (x)}$, $\frac{M \mid (x)\ L}{N(n)}$	$\psi = \varphi - \varrho_M + \varrho_N - \lambda$

k) $\dfrac{N \mid (x)[L]}{M\ m}$, $\dfrac{M\ m \quad [L]}{N \mid (x)}$ $\quad \psi = -\varphi - \varrho_N + \varepsilon(M, m)$

l) $\dfrac{N \mid (x)\ L}{M\ m}$, $\dfrac{M\ m \quad L}{N \mid (x)}$ $\quad \psi = -\varphi - \varrho_N + \delta_M + \varepsilon(M, m) + \lambda$

m) $\dfrac{N \mid (x)\ L}{M(m)}$, $\dfrac{M(m) \quad L}{N \mid (x)}$ $\quad \psi = -\varphi + \varrho_M - \varrho_N + \lambda$

n) $\dfrac{\to L}{M\ m}$, $\dfrac{M\ m}{\to L}$ $\quad \varphi_L = \delta_M + \varepsilon(M, m)$

o) $\dfrac{\to L}{M(m)}$, $\dfrac{M(m)}{\to L}$ $\quad \varphi_L = \varrho_M$

p) $\dfrac{N\ n}{\to L}$, $\dfrac{\to L}{N\ n}$ $\quad \varphi_L = \varphi + \delta_N + \varepsilon(N, n)$

q) $\dfrac{N(n)}{\to L}$, $\dfrac{\to L}{N(n)}$ $\quad \varphi_L = \varphi + \varrho_N$

r) $\dfrac{\to N\ n}{L}$, $\dfrac{L}{\to N\ n}$ $\quad \varphi = \varphi_L - \varepsilon(N, n) - \delta_N$

s) $\dfrac{\to N(n)}{L}$, $\dfrac{L}{\to N(n)}$ $\quad \varphi = \varphi_L - \varrho_N$.

Liegt eine der beiden Leitern auf der Zunge, so soll diese mit N bezeichnet werden.

C. Aufspaltung des Fehlers bei einer Rechenstabrechnung in Elementarfehler.

Der Fehler im Endergebnis einer Rechenstabrechnung kann jetzt auf die Elementarfehler zurückgeführt werden.

Beispiele:

1. Aufsuchen der Quadratwurzel auf dem Rechenstab

$$\frac{N^2(n) \qquad L}{N \mid (\sqrt{n})}.$$

$$\varphi = 0, \qquad \psi = \varphi - \varrho_N + \varrho_{N^2} - \lambda,$$

$$\underline{\psi = -\varrho_N + \varrho_{N^2} - \lambda.}$$

2. Multiplikation auf dem Rechenstab

$$\frac{\to N'\ 1\,[L]}{N\ (a)}, \quad \frac{N'(b) \qquad L}{N \mid (a\cdot b)},$$

$$\varphi = \varrho_{N,1} - \varepsilon(N', 1), \qquad \psi = \varphi - \varrho_{N,2} + \varrho_{N'} - \lambda,$$

$$\underline{\psi = \varrho_{N,1} - \varrho_{N,2} + \varrho_{N'} - \varepsilon(N', 1) - \lambda.}$$

3. Division auf dem Rechenstab

$$\frac{\to N'(b)\ L}{N\ (a)}, \quad \frac{N'\ 1 \qquad [L]}{N \mid (a/b)},$$

$$\varphi = \varrho_{N,1} - \varrho_{N'} + \lambda, \qquad \psi = \varphi - \varrho_{N,2} + \varepsilon(N', 1),$$

$$\underline{\psi = \varrho_{N,1} - \varrho_{N,2} - \varrho_{N'} + \varepsilon(N', 1) + \lambda.}$$

3. Abschätzung des Fehlers bei einer Rechenstabrechnung.

Da für die Beträge der Elementarfehler schon auf den Seiten 35 bis 37 obere Schranken angegeben wurden, können die eben hergeleiteten Fehlerformeln dazu benutzt werden, um für die Fehlerstrecke im Ergebnis einer Rechenstabrechnung eine obere Schranke anzugeben.

Für die angegebenen Beispiele ergibt sich:

1. $$|\psi| \leqq 2 \cdot r + l$$

$$|\psi| \leqq 2 \cdot 0{,}25 + 0{,}05 \text{ mm}$$

$$|\psi| \leqq 0{,}55 \text{ mm}.$$

2. und 3. $$|\psi| \leqq 3 \cdot r + e + l.$$

Die benutzten Teilungen liegen unmittelbar nebeneinander, es ist also $l = 0$.

$$|\psi| \leqq 3 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \text{ mm}$$

$$|\psi| \leqq 0{,}78 \text{ mm}.$$

Erfolgt die Ablesung des Ergebnisses auf einer Funktionsleiter mit der Gleichung $z = f(n)$, so ist

$$\psi = \Delta z = f'(n) \cdot \Delta n + \ldots .$$

Diese Reihe kann fast stets nach dem ersten Glied abgebrochen werden, dann ist

$$\Delta n = \psi / f'(n).$$

Bei den logarithmischen Leitern ist

$$\Delta n = \psi \cdot 2{,}30 \cdot n / E$$

und daher ist der relative Fehler $\mathrm{F} = \frac{100 \cdot \Delta n}{n}$ von n unabhängig.

$$F = \psi \cdot 230 / E.$$

Für die angeführten Beispiele ergibt sich:

1. Aufsuchen der Quadratwurzel auf dem Rechenstab

$$|F| \leqq 0{,}51\,\%;$$

2. Multiplikation auf dem Rechenstab

$$|F| \leqq 0{,}72\,\%;$$

3. Division auf dem Rechenstab

$$|F| \leqq 0{,}72\,\%.$$

4. Der mittlere Fehler bei einer Rechenstabrechnung.

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Fehler werden nun aber nie oder jedenfalls nur sehr selten erreicht, die Angaben eignen sich also nicht zur Beurteilung der Fehler, die bei einer Rechnung wirklich auftreten. Hierfür eignet sich die Angabe des mittleren Fehlers. Zur experimentellen Bestimmung des mittleren Fehlers, der bei der Ausführung einer Rechnung auf einer bestimmten Rechenstabart entsteht, wird man auf vielen Rechenstäben dieser Art sehr viele Rechnungen durchführen und die erhaltenen Werte mit dem genauen Wert vergleichen. Dies Experiment liefert eine Fehlerverteilung und die Wurzel aus der Streuung dieser Verteilung ist der mittlere Fehler.

Nun wurde aber der Fehler im Endergebnis einer Rechnung bereits aufgespalten in Elementarfehler, die gewonnene Fehlerverteilung kann daher aufgefaßt werden als Summenverteilung von Elementarfehlerverteilungen. Sind Mittelwert und Streuung der Elementarfehlerverteilungen bekannt, so können Mittelwert und Streuung der Summenverteilung berechnet werden. Zur Berechnung des mittleren Fehlers ist also die Kenntnis der Elementarfehlerverteilung erforderlich.

Die Verteilungen der Elementarfehler lassen sich experimentell nicht bestimmen. Es wird daher hierüber eine geeignete Annahme gemacht, deren Brauchbarkeit später dadurch bewiesen wird, daß für die untersuchten Rechnungen der berechnete mittlere Fehler mit dem beobachteten übereinstimmt.

Es liegt nahe, für die Elementarfehler ε, δ, γ, λ Gleichwahrscheinlichkeit innerhalb ihrer Grenzen anzunehmen. Die Verteilungen werden dann beschrieben durch die Wahrscheinlichkeitsdichten:

$$w(\varepsilon) = \begin{matrix} 1:2\,e & \text{für} & |\varepsilon| \leqq e\,, \\ 0 & „ & |\varepsilon| > e\,. \end{matrix}$$

Die Streuung dieser Verteilung ist $s^2 = e^2/3$.

$$w(\delta) = \begin{matrix} 1:2\,d & \text{für} & |\delta| \leqq d\,, \\ 0 & „ & |\delta| > d\,. \end{matrix}$$

Die Streuung dieser Verteilung ist $s^2 = d^2/3$.

$$w(\gamma) = \begin{matrix} 1:2\,g & \text{für} & |\gamma| \leqq g\,, \\ 0 & „ & |\gamma| > g\,. \end{matrix}$$

Die Streuung dieser Verteilung ist $s^2 = g^2/3$.

$$w(\lambda) = \begin{matrix} 1:2\,l & \text{für} & |\lambda| \leqq l\,, \\ 0 & „ & |\lambda| > l\,. \end{matrix}$$

Die Streuung dieser Verteilung ist $s^2 = l^2/3$.

Die Verteilung des Einschätzfehlers ist noch nicht ganz bestimmt, denn es soll $g = \Delta/10$ sein und Δ, die Entfernung zweier benachbarter Teilstriche auf dem Rechenstab ist nicht konstant. Die Untersuchung sei hier für die Teilung $z = 250 \cdot \log n$ mm eines gewöhnlichen logarithmischen Rechenstabes durchgeführt. Die folgende Tabelle gibt die Häufigkeitsverteilung für Δ bei dieser Leiter.

Δ	Häufigkeit im Bereich		
	1,00 ÷ 2,00	2,00 ÷ 4,00	4,00 ÷ 10,00
0,45 ÷ 0,55	3	3	3
0,55 ÷ 0,65	30	30	30
0,65 ÷ 0,75	22	22	22
0,75 ÷ 0,85	17	17	17
0,85 ÷ 0,95	14	14	14
0,95 ÷ 1,05	11	11	11
1,05 ÷ 1,15	3	3	9
1,15 ÷ 1,25	—	—	7
1,25 ÷ 1,35	—	—	7
	100	100	120

Die Zahlen, die bei den Rechnungen auftreten, werden sich gleichmäßig über den Zahlenbereich 1,000 ÷ 10,00 verteilen (von der Stellung des Kommas wird abgesehen). Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Zahl n in ein Rechenstabintervall

$$1{,}00 \leqq n < 1{,}01\,, \quad 1{,}01 \leqq n < 1{,}02\,, \quad \ldots 1{,}99 \leqq n < 2{,}00$$

fällt, ist demnach 1/900; für die Intervalle

$$2{,}00 \leqq n < 2{,}02\,, \quad 2{,}02 \leqq n < 2{,}04\,, \quad \ldots 3{,}98 \leqq n < 4{,}00$$

ist sie 1/450 und für die Intervalle

$$4{,}00 \leqq n < 4{,}05\,, \quad 4{,}05 \leqq n < 4{,}10\,, \quad \ldots 9{,}95 \leqq n < 10{,}00$$

ist sie 1/180.

Die Intervalle der Leiter seien numeriert mit 1, 2, 3, ... ν, ... 320, und ω_ν sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Zahl n im ν-Intervall liegt. Dann ist als Streuung der Verteilung der Einschätzfehler

$$s^2 = \sum_\nu \omega_\nu \frac{g_\nu^2}{3} = \frac{1}{300} \sum_\nu \omega_\nu \cdot \Delta_\nu^2$$

zu erwarten. Mit Hilfe der auf S. 43 angegebenen Häufigkeitsverteilung läßt sich diese Summe berechnen.

$$\sum_{\nu=1}^{100} \Delta_\nu^2 = \sum_{\nu=101}^{200} \Delta_\nu^2 = 59{,}18\,; \quad \sum_{\nu=201}^{320} \Delta_\nu^2 = 88{,}35\,.$$

$$\sum_\nu \omega_\nu^2 \Delta_\nu^2 = \frac{59{,}18}{900} + \frac{59{,}18}{450} + \frac{88{,}35}{180} = 0{,}688$$

$$s^2 = 0{,}00229\,.$$

Für die Leiter $z = 250 \cdot \log n$ mm ist also die Streuung der Verteilung der Einschätzfehler

$$s^2 = 23 \cdot 10^{-4}\,.$$

Für die Leiter $z = 125 \cdot \log n$ ergibt sich in der gleichen Weise

Δ	Häufigkeit im Bereich 1,00 ÷ 2,00	2,00 ÷ 5,00	5,00 ÷ 10,00
0,45 ÷ 0,55	1	1	1
0,55 ÷ 0,65	15	15	15
0,65 ÷ 0,75	12	12	12
0,75 ÷ 0,85	8	8	8
0,85 ÷ 0,95	7	7	7
0,95 ÷ 1,05	5	5	5
1,05 ÷ 1,15	2	5	2
1,15 ÷ 1,25	—	3	—
1,25 ÷ 1,35	—	4	—
	50	60	50

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{50} = 1/450\,,$$

$$\omega_{51} = \omega_{52} = \ldots = \omega_{110} = 1/180\,,$$

$$\omega_{111} = \omega_{112} = \ldots = \omega_{160} = 1/90\,.$$

$$\sum_{\nu=1}^{50} \Delta_\nu^2 = \sum_{\nu=111}^{160} \Delta_\nu^2 = 29{,}74\,; \quad \sum_{\nu=51}^{110} \Delta_\nu^2 = 44{,}45\,.$$

$$\sum_\nu \omega_\nu \Delta_\nu^2 = \frac{29{,}74}{450} + \frac{44{,}45}{180} + \frac{29{,}74}{90} = 0{,}643\,,$$

$$s^2 = 0{,}00214\,.$$

Für die Leiter $z = 125 \cdot \log n$ mm ist also die Streuung der Verteilung der Einschätzfehler

$$s^2 = 21 \cdot 10^{-4}\,.$$

Oder zusammengefaßt:

Bei dem üblichen logarithmischen Rechenstab ist die Streuung der Verteilung der Einschätzfehler bei den Leitern

$$z = E \cdot \log n \;(E = 250 \text{ mm},\; E = 125 \text{ mm}) \qquad s^2 = 22 \cdot 10^{-4}.$$

Kann für die obere Schranke der Abrundungsfehler $\Delta/20$ gesetzt werden, so stimmt die Verteilung der Abrundungsfehler fast mit der der Einschätzfehler überein. Sie unterscheiden sich nur dadurch, daß die Abrundungsfehler nur halb so groß sind wie die Einschätzfehler.

Bei dem üblichen logarithmischen Rechenstab ist die Streuung der Verteilung der Abrundungsfehler bei den Leitern

$$z = E \cdot \log n \; (E = 250 \text{ mm}, \; E = 125 \text{ mm}) \qquad s^2 = 6 \cdot 10^{-4}.$$

Der zwischen n_1 und n_2 eingeschätzte Teilstrich mit der Bezifferung

$$n = n_1 + k \cdot (n_2 - n_1) = (1 - k) \cdot n_1 + k \cdot n_2$$

ist behaftet mit dem Fehler

$$\varepsilon(N, n) = (1 - k) \cdot \varepsilon(N, n_1) + k \, \varepsilon(N, n_2).$$

Die Verteilung dieses Fehlers ist eine Linearkombination zweier Verteilungen $w(\varepsilon)$ und die Streuung dieser Verteilung ist

$$s^2 = (1 - k)^2 \cdot e^2/3 + k^2 \cdot e^2/3, \qquad s^2 = [(1 - k)^2 + k^2] \cdot e^2/3,$$

wenn k als konstant angesehen wird.

Den Wert der eckigen Klammer gibt die folgende Tabelle.

k	$[(1-k)^2 + k^2]$	
0,0	1,00	
0,1	0,82	
0,2	0,68	
0,3	0,58	
0,4	0,52	Mittelwert 0,67.
0,5	0,50	
0,6	0,52	
0,7	0,58	
0,8	0,68	
0,9	0,82	

Ist vom Teilstrich n nur bekannt, daß er im allgemeinen eingeschätzt werden muß, so sind alle 10 k-Werte gleichwahrscheinlich und Streuung der Fehlerverteilung ist

$$s^2 = 0{,}67 \cdot e^2/3.$$

Für einen Präzisionsrechenstab ist $e = 0{,}03$ mm und daher

$$s^2 = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Die Verteilung für den Fehler ϱ ist die Summenverteilung aus den Verteilungen der Fehler

$$\alpha, \beta, \gamma, [(1 - k) \cdot \varepsilon(N, n_1) + k \cdot \varepsilon(N, n_1)].$$

Der Interpolationsfehler kann bei den Teilungen $z = E \cdot \log n$ ($E = 250$ mm, $E = 125$ mm) vernachlässigt werden (s. S. 36). Für diese Teilungen ist also die Streuung der Verteilung der ϱ

$$s^2 = 6 \cdot 10^{-4} + 22 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} = 0{,}0030.$$

Beispiele:

Für die schon früher betrachteten Beispiele soll der mittlere Fehler berechnet werden.

1. Aufsuchen der Quadratwurzel auf dem Rechenstab (s. S. 41)

$$\psi = -\varrho_N + \varrho_{N^2} - \lambda.$$

Die Streuung der Verteilung des Fehlers ψ ist

$$s^2 = 2 \cdot 0{,}0030 + 0{,}0008 = 0{,}0068\,,$$

also die mittlere Fehlerlänge

$$s = 0{,}082 \text{ mm}$$

und der zugehörige prozentuale Fehler

$$S = 0{,}076\,\%\,.$$

2., 3. Multiplikation und Division auf dem Rechenstab (s. S. 41)

$$\psi = \varrho_{N,1} - \varrho_{N,2} \pm \varrho_{N'} \mp \varepsilon\,(N', 1) \mp \lambda\,.$$

Die Streuung der Verteilung des Fehlers ψ ist

$$s^2 = 3 \cdot 0{,}0030 + 0{,}0003 + 0{,}0008 = 0{,}0101\,,$$

also die mittlere Fehlerlänge

$$s = 0{,}1005 \text{ mm}$$

und der zugehörige prozentuale Fehler

$$S = 0{,}093\,\%\,.$$

5. Vergleich der Theorie mit der Erfahrung.

Die vorgetragene Methode wurde an einer Reihe von Beispielen geprüft; das Ergebnis dieser Prüfung gibt die folgende Tabelle wieder. Soweit nichts anderes angegeben ist, wurde der mittlere Fehler aus 20 Rechnungen der angegebenen Art ermittelt. Die Genauigkeit bei der Einstellung und der Ablesung wurde nur soweit getrieben, daß noch eine gute Rechengeschwindigkeit erzielt werden konnte. Irgendwelche Hilfsmittel, wie Lupe u. dgl., wurden nicht benutzt.

	Mittlerer Fehler		Größter Fehler	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
Gewöhnlicher Rechenstab				
$\sqrt{n}$	0,075 %	0,076 %	0,16 %	0,51 %
$a \cdot b$ ($E = 250$ mm)	0,08 %	0,093 %	0,15 %	0,72 %
a / b	0,093 %	0,093 %	0,23 %	0,72 %
$a \cdot b$ ($E = 125$ mm)	0,19 %	0,186 %	0,40 %	1,5 %
$\sqrt{a^2 \mp b^2}$	0,10 %	0,1 %	0,23 %	∞
n^2	0,15 %	0,15 %	0,27 %	1,0 %
$a : b = c : x$	0,11 %	0,11 %	0,22 %	1,0 %
$\log n$	0,00035	0,00033	0,0007	0,002
Den gegebenen Zahlen entsprechen stets Teilstriche, die auf dem Rechenstab gezeichnet sind				
$a \cdot b$	0,064 %	0,074 %	0,14 %	0,45 %
n^2	0,14 %	0,13 %	0,31 %	0,70 %
Sonderrechenstab AWF 718 „Zinseszins“				
Zinseszins	0,42 %	0,39 %	0,9 %	2,7 %
Tilgung	0,39 %	0,39 %	0,6 %	2,7 %

Angaben in der Literatur:

Weitbrecht: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, II. Teil, S. 6:

$a \cdot b$ ($E = 125$ mm) { größter beobachteter Fehler: 0,40 %, mittlerer Fehler: 0,19 %. (ermittelt aus 45 Rechnungen) }

Mehmke, an verschiedenen Orten:

Für die gleiche Rechnung: „durchschnittliche Genauigkeit" 0,2 %.

(Die Theorie liefert: $|F| \leq 1{,}5\,\%$, $S = 0{,}186\,\%$).

Gebrauchsanweisung für Rechenschieber sämtlicher Systeme der Firma Albert Nestler A.-G.:

$a \cdot b$; $a : b$ ($E = 250$ mm) mittlerer Fehler: 0,08 %.

(Die Theorie liefert: $S = 0{,}093\,\%$).

Aus der guten Übereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten mittleren Fehlern kann gefolgert werden, daß die über die Verteilung der Elementarfehler gemachten Annahmen zulässig sind und daß die vorgetragene Methode zur Berechnung der Fehler bei Rechenstabrechnungen brauchbar ist.

6. Anwendung der Theorie.

Der Wert der vorgetragenen Theorie besteht darin, daß der Fehler bei Rechnungen auf einem beliebigen Rechenstab ermittelt werden kann, ohne daß der Rechenstab angefertigt zu sein braucht. Es kann also schon bei der Konstruktion eines Rechenstabes entschieden werden, ob er den gestellten Genauigkeitsanforderungen genügt.

Beispiel:

Für die Rechnungen der Lebensversicherungsmathematik soll ein Sonderrechenstab gebaut werden. Wie groß ist der zu erwartende Fehler, wenn der Rechenstab in Präzisionsausführung hergestellt wird?

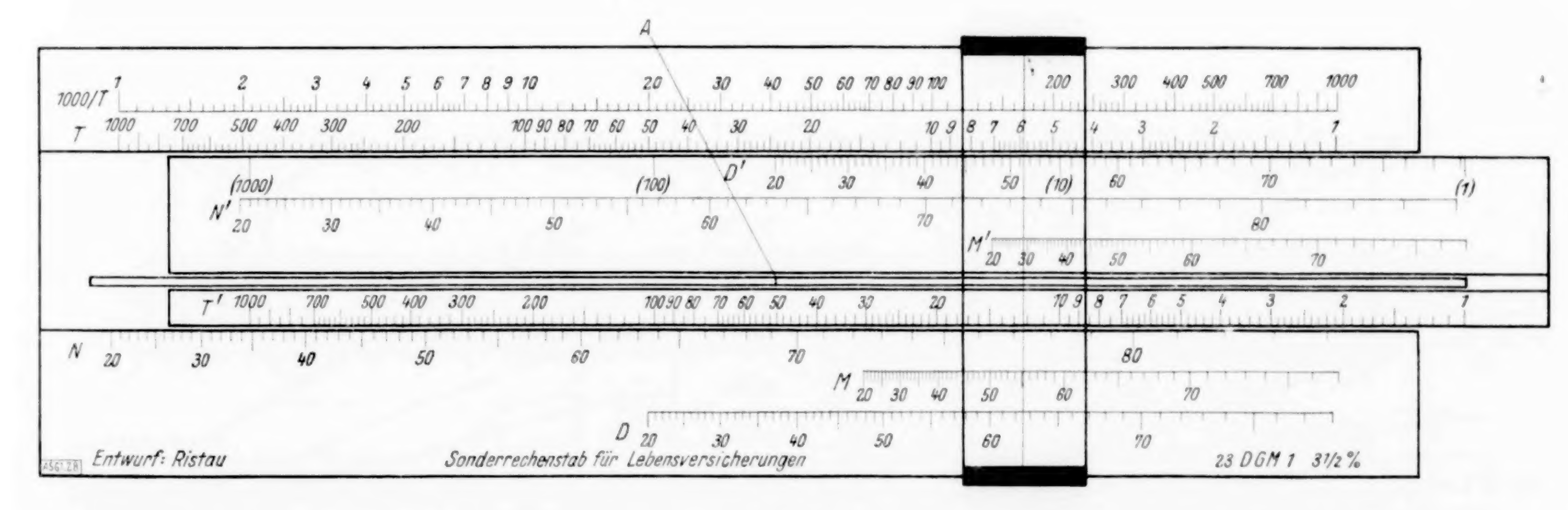


Abb. 28.

Abb. 28 zeigt diesen Rechenstab. Über den willkürlichen Faktor in der Sterbetafel wurde so verfügt, daß $l_{20} = 100$. Auf der Zunge befindet sich eine verschiebbare Marke A, sie dient dazu, eine Zahl auf der Zunge zu markieren, ebenso wie der Läufer eine Zahl auf dem Stab markiert.

Es soll hier nicht gezeigt werden, wie die Versicherungsrechnungen mit dem Rechenstab durchgeführt werden. Die Fehlerbetrachtung sei ausgeführt für die Berechnung der vielgebrauchten Ausdrücke

$$_{m|n}\mathsf{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}.$$

Die Leitern $z = E \cdot \log t$, $z = E \cdot \log N_x \ldots$ sollen bezeichnet werden mit $T, N, \ldots$; oder mit $T', N', \ldots$, wenn sie auf der Zunge liegen.

$$\frac{\rightarrow T' \quad 1 \quad [L]}{N_{x+m+n}}, \quad \frac{T' \mid \quad (U)[L]}{N_{x+m}}, \quad \frac{T'\,(U-1)}{\rightarrow \quad L}, \quad \frac{\rightarrow D'\,x}{L}, \quad \frac{T \mid (_{m|n}\mathsf{a}_x)[L]}{D'\,1}.$$

$$\varphi_1 = \delta_N + \varepsilon\,(N, x+m+n) - \varepsilon\,(T', 1)\,,$$

$$\psi_U = -\varphi_1 - \varrho_{T',2} + \varepsilon\,(N, x+m)\,,$$

$$\varphi_L = \varphi_1 + \varrho_{T',3} + \frac{U}{U-1}\cdot\psi_U\,,$$

$$\varphi_4 = \varphi_L - \varepsilon\,(D', x) - \delta_{D'} + \lambda\,,$$

$$\psi = \varphi_4 - \varrho_T + \varepsilon\,(D', 1)\,,$$

$$\psi = \varrho_T + \varrho_{T',3} - \delta_{D'} + \varepsilon\,(D', 1) - \varepsilon\,(D', x) + \lambda + \left(1 - \frac{U}{U-1}\right)\Big((\delta_N + \varepsilon\,(N, x+m+n) - \varepsilon\,(T', 1)\Big)$$
$$+ \frac{U}{U-1}\cdot(-\varrho_{T',2} + \varepsilon\,(N, x+m))\,.$$

$$|\psi| \leqq (2\cdot 0{,}25 + 0{,}05 + 2\cdot 0{,}03 + 0{,}05) + \left|1 - \frac{U}{U-1}\right|\cdot(0{,}05 + 2\cdot 0{,}03) + \frac{U}{U-1}\cdot(0{,}25 + 0{,}03)\ \text{mm}\,,$$

$$|\psi| \leqq 0{,}66 + \left|1 - \frac{U}{U-1}\right|\cdot 0{,}11 + \frac{U}{U-1}\cdot 0{,}28\ \text{mm}\,.$$

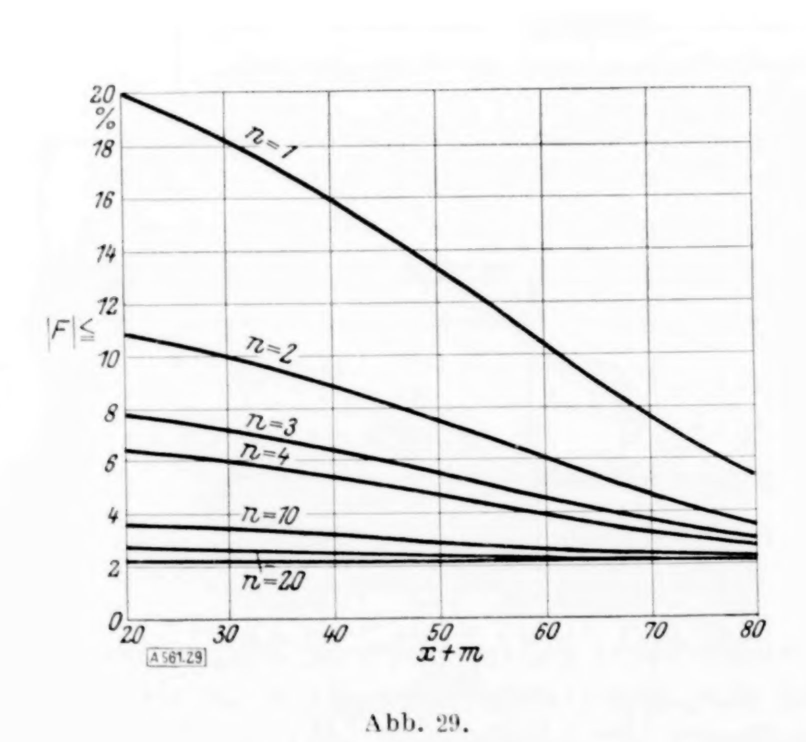


Abb. 29.

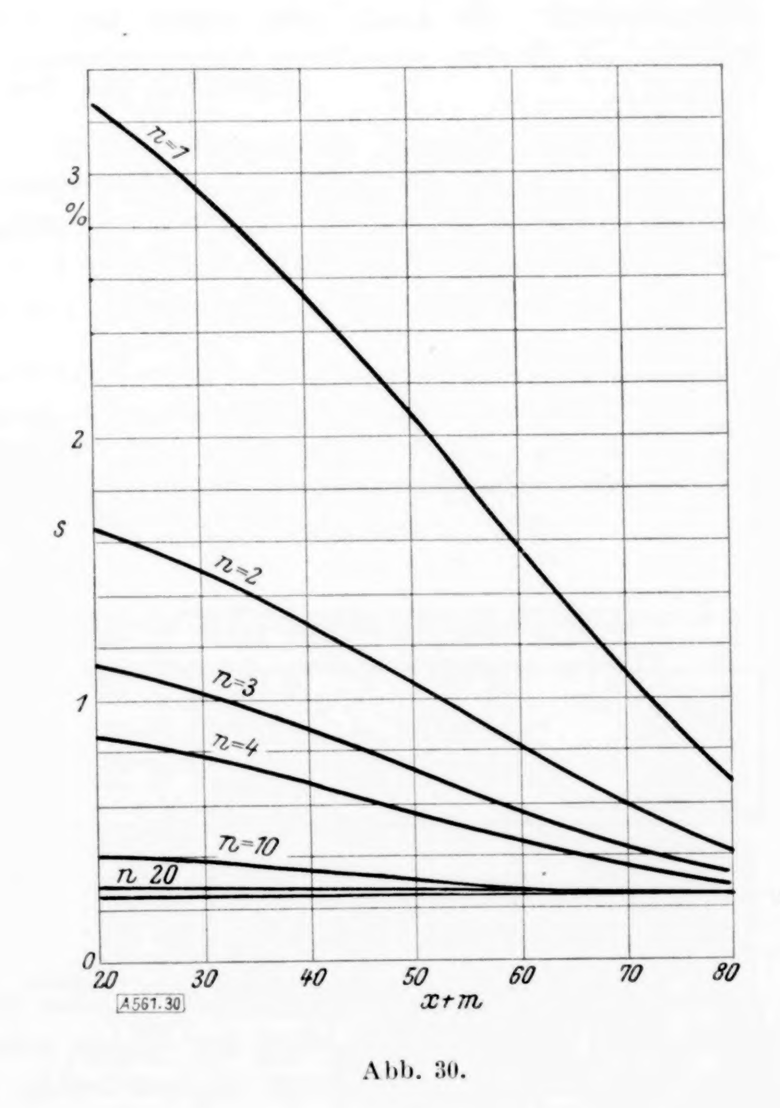


Abb. 30.

Die Streuung der Fehlerverteilung ist

$$s^2 = (2\cdot 0{,}0030 + 0{,}0008 + 2\cdot 0{,}0003 + 0{,}0008 + \left(1 - \frac{U}{U-1}\right)^2\cdot(0{,}0008 + 2\cdot 0{,}0003)$$
$$+ \left(\frac{U}{U-1}\right)^2\cdot(0{,}0030 + 0{,}0003)\,,$$

$$s^2 = 0{,}0096 + 0{,}0028\cdot\frac{U}{U-1} + 0{,}0047\cdot\left(\frac{U}{U-1}\right)^2.$$

Für den in Abb. 24 gezeigten Rechenstab ($E = 100$ mm) geben Abb. 29 und 30 den maximalen und den mittleren Fehler.

Über die Knickung eines gekrümmten Stabes.

Von *A. Lockschin* in Dnepropetrowsk.

1. Der vorliegende Aufsatz behandelt die Knickung eines gekrümmten Stabes von konstantem und veränderlichem Querschnitt[1]). Wir gehen von den Gleichgewichtsgleichungen aus, welche bekanntlich lauten[2]):

$$\frac{dN}{ds}+Tk+X=0,\qquad \frac{dT}{ds}-Nk+Z=0,\qquad \frac{dM}{ds}+N=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wo N — die Querkraft, T — die Axialkraft, M — das Biegungsmoment, k — die Krümmung der Achse bedeutet. Zwischen der Zunahme der Krümmung und dem Biegungsmoment existiert folgende Beziehung:

$$M=B(k-k_0),$$

wo B die Biegungssteifigkeit ist.

Führt man nun in die Gl. (1) ϱ_0 und Θ ein und setzt für $k-k_0$ die betreffenden Werte, so erhält man folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{dN}{d\Theta}+T\left(1+\varrho_0\frac{M}{B}\right)+\varrho_0 X=0,\qquad \frac{dT}{d\Theta}-N\left(1+\varrho_0\frac{M}{B}\right)+\varrho_0 Z=0,\qquad \frac{dM}{d\Theta}+\varrho_0 N=0 \quad . \; . \quad (2).$$

Unter der Voraussetzung, daß $\frac{d}{d\Theta}(\varrho_0 X)-\varrho_0 Z=0$ erhält man aus den Gl. (2) für die Bestimmung der kritischen Werte der Belastung die folgende Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d^2}{d\Theta^2}+1\right)\frac{1}{\varrho_0}\frac{dM}{d\Theta}+\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{\varrho_0{}^2 XM}{B}\right)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Bezeichnet man die Verschiebungen in der Richtung der Achsen x und z mit u und w, so geht die Zunahme der Krümmung $k-k_0$ in den Ausdruck über:

$$k-k_0=\frac{1}{\varrho_0}\frac{d}{d\Theta}\frac{w+\dfrac{du}{d\Theta}}{\varrho_0}.$$

Setzt man außerdem die Bedingung der Undehnbarkeit der Achse voraus, also $\frac{dw}{d\Theta}-u=0$, so erhält man:

$$M=\frac{B}{\varrho_0}\frac{d}{d\Theta}\frac{1}{\varrho_0}\left(\frac{d^2w}{d\Theta^2}+w\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Für den Spezialfall $\varrho_0=a=\text{const}$ wird

$$M=\frac{B}{a^2}\left(\frac{d^3w}{d\Theta^3}+\frac{dw}{d\Theta}\right)\quad \text{oder}\quad M=\frac{B}{a^2}\left(\frac{d^2u}{d\Theta^2}+u\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Letztere Formeln dienen zur Bestimmung der Biegung des Stabes mit kreisförmiger Achse. Wir gehen nun zur Integration des Systems der Differentialgleichungen (3) und (4) über. Nach der ersten Integration erhält man aus (4) folgende Gleichung:

$$\frac{d^2w}{d\Theta^2}+w=\varrho_0\int_0^\Theta \frac{\varrho_0 M}{B}\,d\Theta+c\,\varrho_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Das allgemeine Integral der Gl. (6) nimmt die folgende Form an:

$$w=c_1\cos\Theta+c_2\sin\Theta+\left\{\sin\Theta\int_0^\Theta \varrho_0\cos\Theta\,d\Theta\int_0^\Theta\frac{\varrho_0 M}{B}\,d\Theta-\cos\Theta\int_0^\Theta\varrho_0\sin\Theta\,d\Theta\int_0^\Theta\frac{\varrho_0 M}{B}\,d\Theta\right\}+$$

$$+c\left(\sin\Theta\int_0^\Theta\varrho_0\cos\Theta\,d\Theta-\cos\Theta\int_0^\Theta\varrho_0\sin\Theta\,d\Theta\right).$$

[1]) Die Knickfestigkeit des gekrümmten Stabes ist von folgenden Autoren behandelt worden: S. P. Timoshenko: Elastizitätslehre, II. Teil, 1916, S. 165; R. Mayer: Knickfestigkeit, 1921, S. 136; E. L. Nicolai: ZAMM, 1923, 3, 227; E. Chwalla: Sitzungsberichte Wien 136, 645 bis 678, 1927; M. Mesnager: Genie Civil 1929, S. 113; Pigeau: Genie Civil 1929, NN 19 bis 20; Steurmann: Berichte des Polytechnischen Instituts in Kieff, 1929, 1 Buch, S. 25; A. Dinnik: Anzeiger der Ingenieure und Techniker, 1933; A. Lockschin: Comptes Rendus, 1932, Philosophical Magazine, 1932.

[2]) A. E. Love: A treatise on the mathematical theory of Elasticity, 1927, S. 397.

Bei der Integration ergaben sich drei Konstanten, und nach der Integration der Differentialgleichung (3) ergeben sich noch drei Konstanten. Zur Bestimmung dieser sechs Konstanten sind somit sechs Grenzbedingungen erforderlich. Wenn die Enden des Stabes in Gelenken befestigt sind, dann haben die Grenzbedingungen folgende Form:

$$\Theta = 0, \quad w = 0, \quad \frac{d\,w}{d\,\Theta} = 0, \quad M = 0 \qquad \text{für} \qquad \Theta = \gamma, \quad w = 0, \quad \frac{d\,w}{d\,\Theta} = 0, \quad M = 0 .$$

Berücksichtigt man von den obigen Bedingungen vier Bedingungen, so erhält man:

$$c_1 = c_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\int\limits_0^\gamma \varrho_0 \sin\Theta\, d\,\Theta \int\limits_0^\Theta \frac{\varrho_0 M}{B}\, d\,\Theta}{\int\limits_0^\gamma \varrho_0 \cos\Theta\, d\,\Theta \int\limits_0^\Theta \frac{\varrho_0 M}{B}\, d\,\Theta} = \frac{\int\limits_0^\gamma \varrho_0 \sin\Theta\, d\,\Theta}{\int\limits_0^\gamma \varrho_0 \cos\Theta\, d\,\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

So hat man für den Fall eines Bogenträgers, dessen Enden in Gelenken befestigt sind, die Integration der Differentialgleichung (13) unter der Voraussetzung vorzunehmen, daß

$$\Theta = 0, \quad M = 0 \qquad \text{für} \qquad \Theta = \gamma, \quad M = 0$$

und unter Berücksichtigung der Gl. (7). Auf diese Weise haben wir drei Gleichungen zur Ermittelung der Integrationskonstanten der Differentialgleichung (3).

Betrachten wir jetzt einen Stab mit eingespannten Enden, d. h. den Fall, wo

$$\Theta = 0, \quad w = 0, \quad \frac{d\,w}{d\,\Theta} = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\,\Theta^2} = 0 \qquad \text{für} \qquad \Theta = \gamma, \quad w = 0, \quad \frac{d\,w}{d\,\Theta} = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\,\Theta^2} = 0 .$$

Für diesen Fall ist

$$c = 0, \quad \int\limits_0^\gamma \frac{\varrho_0 M}{B}\, d\,\Theta = 0, \quad \int\limits_0^\gamma \varrho_0 \cos\Theta\, d\,\Theta \int\limits_0^\Theta \frac{\varrho_0 M}{B}\, d\,\Theta = 0, \quad \int\limits_0^\gamma \varrho_0 \sin\Theta\, d\,\Theta \int\limits_0^\Theta \frac{\varrho_0 M}{B}\, d\,\Theta = 0 \quad . \quad (8).$$

Wenn der Stab einen konstanten Querschnitt hat, so ist $B = \text{const}$ und man hat zur Bestimmung der Konstanten die folgenden Gleichungen:

$$\int\limits_0^\gamma \varrho_0 M\, d\,\Theta = 0, \quad \int\limits_0^\gamma \varrho_0 \cos\Theta\, d\,\Theta \int\limits_0^\Theta \varrho_0 M\, d\,\Theta = 0, \quad \int\limits_0^\gamma \varrho_0 \sin\Theta\, d\,\Theta \int\limits_0^\Theta \varrho_0 M\, d\,\Theta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Für den symmetrischen Bogenträger wird es zweckmäßig sein, die Veränderliche $\zeta = \Theta - \alpha$ einzuführen, wo $\alpha = \frac{\gamma}{2}$, d. h. gleich ist dem halben Winkel zwischen den Normalen zur Achse, die an den Enden des Bogenträgers gezogen sind.

2. Der kreisförmige Bogenträger. Nehmen wir an, daß der Bogenträger eine Symmetrieachse habe, und führen die Veränderliche $\zeta = \Theta - \alpha$ ein. Für den Fall einer gleichmäßig normal zur Achse des Stabes verteilten Belastung $X = p$ (p = Kraft pro Längeneinheit) lautet die entsprechende Differentialgleichung für M wie folgt:

$$\frac{1}{a^3}\left(\frac{d^2}{d\,\zeta^2} + 1\right)\frac{d\,M}{d\,\zeta} + p\,\frac{d}{d\,\zeta}\left(\frac{M}{B}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Wir betrachten zuerst den Bogenträger mit gelenkiger Befestigung an den Enden, für welchen die Bedingungen lauten:

$$M(\alpha) = M(-\alpha) = 0, \quad \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M(\cos\zeta - \cos\alpha)}{B}\, d\,\zeta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Für die ungerade Funktion, welche der Differentialgleichung (10) und der dritten Bedingung (11) genügt, wird aus Symmetriegründen für

$$\zeta = 0, \quad M = 0, \quad \frac{d^2 M}{d\,\zeta^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die erste Integration von (10) ergibt:

$$\frac{1}{a^3}\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)M+\frac{p\,M}{B}=c.$$

Aus den Bedingungen (12) folgt, daß $c=0$. Wir erhalten somit die Differentialgleichung

$$\frac{B}{a^3}\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)M+p\,M=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

mit den Grenzbedingungen:

$$M(0)=M(\alpha)=0.$$

Wenn die Enden des Stabes dagegen eingespannt sind, so lauten die Bedingungen für M wie folgt:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{M}{B}\,d\zeta=0,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{M}{B}\cos\zeta\,d\zeta=0,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{M}{B}\sin\zeta\,d\zeta=0 \quad \ldots\ldots \quad (14).$$

Wenn man die Bedingungen (12) annimmt, so wird den ersten beiden dieser Bedingungen (14) genügt. Infolgedessen muß die Differentialgleichung (13) integriert werden unter den folgenden Bedingungen:

$$M(0)=0,\quad \int_{0}^{\alpha}\frac{M}{B}\sin\zeta\,d\zeta=0.$$

Für den Bogenträger von konstantem Querschnitt haben wir

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)\frac{d\,M}{d\,\zeta}+\frac{p\,a^3}{B}\cdot\frac{d\,M}{d\,\zeta}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15),$$

$$M(\alpha)=M(-\alpha)=0,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}(\cos\zeta-\cos\alpha)\,M\,d\zeta=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Es wird nun allen drei Bedingungen (16) genügt, wenn man annimmt

$$M=A\sin\frac{\pi\,\zeta}{\alpha}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (15) ein, so erhält man

$$p_{kr}=\frac{B}{a^3}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}-1\right).$$

Wenn die Stabenden eingespannt sind, so gehen die Bedingungen (14) in folgende über:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}M\,d\zeta=0,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}M\cos\zeta\,d\zeta=0,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}M\sin\zeta\,d\zeta=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Mit dem Ansatz

$$M=A\sin m_1\zeta$$

erhält man aus Gl. (15) $p_{kr}=\dfrac{B(m_1{}^2-1)}{a^3}$. Die ersten zwei Bedingungen von (17) sind bei beliebigem m_1 erfüllt. Aus der dritten Bedingung ergibt sich für die Bestimmung von m_1 die folgende Gleichung:

$$m_1\,\alpha\operatorname{ctg} m_1\,\alpha=\alpha\operatorname{ctg}\alpha\ ^{3)}.$$

[3]) Diese Gleichung wurde von E. L. Nicolai aufgestellt: ZAMM, 1923, „Berichte des Polytechnischen Instituts in Leningrad“, Vol. XXVII, S. 323, 1918.

3. Der parabolische Bogenträger von konstantem Querschnitt[4]). Der parabolische Bogenträger von konstantem Querschnitt trägt die über die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Belastung von der Intensität p, welche parallel zur Symmetrieachse wirkt. Im vorliegenden Falle ist also

$$B = \text{const}, \quad X = p\cos^2\zeta, \quad \varrho_0 = \frac{a}{\cos^3\zeta},$$

wo a — der Krümmungsradius für $\zeta = 0$ ist. Setzt man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (3) ein, so geht diese in folgende Gleichung über:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)\cos^3\zeta\frac{dM}{d\zeta}+\frac{p\,a^3}{B}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{M}{\cos^4\zeta}\right)=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18).$$

Diese Differentialgleichung ist unter den folgenden Bedingungen zu integrieren:

$$M(a)=M(-a)=0, \qquad \int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{1}{\cos^2 a}-\frac{1}{\cos^2\zeta}\right)\frac{M}{\cos^3\zeta}d\zeta=0 \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Für die ungerade Funktion, die der Differentialgleichung (18) und den Bedingungen (19) genügt, wird aus Symmetriegründen

für $\qquad \zeta=0, \quad M=0, \quad \frac{d^2M}{d\zeta^2}=0, \qquad \zeta=a, \quad M=0.$

Setzt man weiter $\cos^3\zeta\frac{dM}{d\zeta}=W$ und integriert dann das System der Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}+1\right)W+\frac{m}{\cos^5\zeta}\left(\frac{W}{\cos^2\zeta}+4\,M\sin\zeta\right)=0, \qquad \frac{dM}{d\zeta}=\frac{W}{\cos^3\zeta} \quad \ldots \quad (20)$$

mit den Anfangsbedingungen:

für $\qquad \zeta=0, \quad W=1, \quad M=0, \quad \frac{dW}{d\zeta}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$

und wo $m=\frac{p\,a^3}{B}$.

Mit Anwendung der Methode von Störmer-Adams hat man:

$$\Delta M_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}+\frac{3}{8}\Delta^3\eta_{n-3},$$

$$\Delta^2 W_{n-1}=\xi_n+\frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2}+\Delta^3\xi_{n-3}+\Delta^4\xi_{n-4}-\frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right],$$

worin $\qquad \eta=h\frac{W}{\cos^3\zeta}$ und $\xi=-h^2\left[W+\frac{m}{\cos^5\zeta}\left(\frac{W}{\cos^2\zeta}+4\,M\sin\zeta\right)\right].$

Wenn m seinen kritischen Wert erreicht, so wird $M(a)=0$. Für einige Werte des Verhältnisses $\frac{f}{l}$ (wo f — die Pfeilhöhe des Bogens und l — die halbe Spannweite bedeutet) sind die kritischen Werte von m berechnet worden und in folgender Zahlentafel 1 zusammengestellt[5]).

Zahlentafel 1.

$\frac{f}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	55,55	11,10	3,36	1,34	0,60

[4]) Der Bogenträger hat eine Symmetrieachse.
[5]) Bei der Ausführung der Berechnungen haben L. Affendik, A. Galjtschenko, M. Goldstein, W. Bowin, A. Malenkin, W. Iwanow, G. Skuratow und E. Schirotschenko teilgenommen.

Wir bezeichnen jetzt $\frac{p l^3}{B}$ mit K_1. Dann ergeben sich die kritischen Werte von p aus den in Zahlentafel 2 angegebenen Werten von K_1.

Zahlentafel 2.

$\frac{f}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
K_1	3,56	5,68	5,81	5,49	4,80

Wenn die Enden des Bogenträgers eingespannt sind, so ist den folgenden drei Bedingungen zu genügen:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^3 \zeta} d\zeta = 0, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^5 \zeta} d\zeta = 0, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M \sin \zeta}{\cos^4 \zeta} d\zeta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Zur Ermittlung der ungeraden Funktion, welche den ersten zwei dieser Bedingungen genügte, integrieren wir die Differentialgleichung (18) mit den Anfangsbedingungen:

$$\text{für} \qquad \zeta = 0, \quad M = 0, \quad \frac{dM}{d\zeta} = 1, \quad \frac{d^2 M}{d\zeta^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Man sieht somit, daß auch im vorliegenden Falle das System (20) unter den Anfangsbedingungen (21) zu integrieren ist. Der kritische Wert von m ergibt sich aus der Gleichung:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M \sin \zeta}{\cos^4 \zeta} d\zeta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

4. Der parabolische Bogenträger von veränderlichem Querschnitt. Die Belastung ist auch hier über die ganze Spannweite parallel der Symmetrieachse gleichmäßig verteilt. Die Biegungssteifigkeit ändere sich nach dem Gesetze:

$$B = \frac{B_0}{\cos^3 \zeta}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in Differentialgleichung (3), so erhält man:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right) \cos^3 \zeta \frac{dM}{d\zeta} + \frac{p a^3}{B_0} \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{M}{\cos \zeta}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Wenn die Enden des Bogenträgers sich frei drehen können, so nehmen die Bedingungen für M die folgende Form an:

$$M(\alpha) = M(-\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \zeta} d\zeta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Hierbei hat man dann das System der Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right) W + \frac{m}{\cos^2 \zeta}\left(\frac{W}{\cos^2 \zeta} + M \sin \zeta\right) = 0, \qquad \frac{dM}{d\zeta} = \frac{W}{\cos^3 \zeta},$$

wo $m = \frac{p a^3}{B_0}$, unter den Anfangsbedingungen (21) zu integrieren. Im weiteren wenden wir gleichfalls die Methode von Störmer-Adams an. Die ermittelten Werte von m und $K_1 = \frac{p l^3}{B_0}$ sind in der Zahlentafel 3 angeführt.

Zahlentafel 3.

$\frac{f}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	60,00	14,62	5,87	3,08	1,84
K_1	3,84	7,48	10,14	12,62	14,72

Bei verspannten Enden des Bogenträgers ist den folgenden Bedingungen zu genügen:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} M\,d\zeta = 0\,, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} M \operatorname{tg}\zeta\,d\zeta = 0 \qquad (27),$$

wobei das System der Differentialgleichungen unter den Anfangsbedingungen (21) zu integrieren ist. Der kritische Wert ergibt sich dann aus der Gleichung:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} M \operatorname{tg}\zeta\,d\zeta = 0 \qquad (28).$$

5. Der Bogenträger mit einer Achse in Form einer Catenoide und von konstantem Querschnitt. Die der Symmetrieachse parallele Belastung ist gleichmäßig über die Achse des Bogenträgers verteilt. Ihre Intensität ist gleich p. Unter Berücksichtigung, daß $X = p\cos\zeta$ und $\varrho = \frac{a}{\cos^2\zeta}$, wo a der Krümmungsradius für $\zeta = 0$ ist, erhält man, dem obiger Werte Einsetzen in (3), die folgende Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right)\cos^2\zeta\,\frac{dM}{d\zeta} + m\,\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{M}{\cos^3\zeta}\right) = 0 \qquad (29).$$

Für den Bogenträger, dessen Enden mit Gelenken befestigt sind, nehmen die Bedingungen für M folgende Form an:

$$M(\alpha) = M(-\alpha) = 0\,, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\zeta}\right)\frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0 \qquad (30).$$

Bezeichnet man $\cos^2\zeta\,\frac{dM}{d\zeta}$ mit W, dann erhält man das System der Gleichungen:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right)W + \frac{m}{\cos^4\zeta}\left(\frac{W}{\cos\zeta} + 3\sin\zeta\cdot M\right) = 0\,, \qquad \frac{dM}{d\zeta} = \frac{W}{\cos^2\zeta} \qquad (31).$$

Dieses System wird nun unter den Anfangsbedingungen (21) gleichfalls nach der Methode Störmer-Adams integriert. Die berechneten Werte von m und $K_1 = \frac{p\,l^3}{B}$ ergeben sich aus der Zahlentafel 4.

Zahlentafel 4.

$\frac{f}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	57,72	12,14	4,06	1,74	0,81
K_1	3,55	5,38	5,24	4,48	3,42

Gehen wir jetzt zum Bogenträger mit verspannten Enden über.

Die Bedingungen für M sind

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0\,, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M}{\cos^3\zeta}\,d\zeta = 0\,, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \log_n \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}} \cdot \frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0 \qquad (32).$$

Integriert man nun analog dem Vorgehenden das System (31) unter Anfangsbedingungen (21), so wird den beiden ersten der drei Bedingungen (32) genügt. Für die Ermittlung des kritischen Wertes m dient die Gleichung:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \log_n \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}} \cdot \frac{M}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = 0 \qquad (33).$$

6. Der Bogenträger mit einer Achse in Form einer Catenoide und von veränderlichem Querschnitt. Der Bogenträger ist symmetrisch und die Biegungsfestigkeit seines Querschnitts ändert sich nach dem Gesetze:

$$B = \frac{B_0}{\cos^3 \zeta},$$

wo B_0 die Biegungssteifigkeit für $\zeta = 0$ ist.

Die Belastung ist auch hier parallel der Symmetrieachse und gleichmäßig über die Achse des Bogenträgers verteilt. Für den vorliegenden Fall ist die folgende Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right) \cos^2 \zeta \frac{dM}{d\zeta} + m \frac{dM}{d\zeta} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (34),$$

wo $m = \frac{p\,a^3}{B_0}$, unter den Bedingungen

$$M(\alpha) = M(-\alpha) = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{\cos \zeta}{\cos \alpha} - 1\right) M\, d\zeta = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (35)$$

zu integrieren.

Setzt man wiederum $\cos^2 \zeta \frac{dM}{d\zeta} = W$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + 1\right) W + \frac{m}{\cos^2 \zeta} W = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (36).$$

Letztere integrieren wir nun unter den Anfangsbedingungen:

für $$\zeta = 0, \quad W = 1, \quad \frac{dW}{d\zeta} = 0.$$

Nach Störmer ist dann:

$$\Delta^2 W_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2 \xi_{n-2} + \Delta^3 \xi_{n-3} + \Delta^4 \xi_{n-4} - \frac{1}{20} \Delta^4 \xi_{n-4}\right].$$

worin $\xi = -h^2 \left(1 + \frac{m}{\cos^2 \zeta}\right) W$ zu setzen ist.

Die kritischen Werte von m ergeben sich aus der Bedingung:

$$\int_0^{\alpha} \frac{W}{\cos^2 \zeta} d\zeta = 0.$$

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Zahlentafel 5 angeführt.

Zahlentafel 5.

$\frac{f}{l}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m	61,93	15,60	7,05	4,06	2,67
$K_1 = \frac{p\,l^3}{B_0}$	3,81	6,92	9,10	10,46	11,27

Bei verspannten Enden des Bogenträgers muß den folgenden Bedingungen genügen:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} M \cos \zeta\, d\zeta = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} M\, d\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \log_n \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}} \cdot M \cos \zeta\, d\zeta = 0 \quad . \; . \; (37).$$

Es ist möglich, die Differentialgleichung (36) in eine Differentialgleichung umzuwandeln, welche in hypergeometrischen Reihen integriert werden kann.

Nimmt man an, daß $\cos \Theta = s$,
so erhält man:

$$(1 - s^2) \frac{d^2 W}{d s^2} - s \frac{dW}{ds} + \left(1 + \frac{m}{s^2}\right) W = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (38).$$

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Funktionalgleichung der Seilkurve.

In den Lehrbüchern der technischen Mechanik wird die zu einer stetigen Verteilung paralleler und gleichgerichteter Kräfte (Kraftdichte oder spez. Belastung $\mu(x)$ kgm^{-1}, $a \leq x \leq b$) gehörige Seilkurve als Grenzlage der Seilecke eingeführt, die — bei einem und demselben Pol und Anfangsseilstrahl — zu allen möglichen, der stetig verteilten Belastung äquivalenten Systemen von parallelen und gleichgerichteten Einzelkräften gehören, für den Fall, daß die dem System von Einzelkräften entsprechende Unterteilung des Lastbereiches $a \ldots b$ unbegrenzt verfeinert wird. Da die Möglichkeit des Grenzüberganges geometrisch einleuchtet, begnügt man sich in Vorlesungen und Lehrbüchern meist mit einer anschaulichen Ableitung des Ergebnisses, indem man es als selbstverständlich ansieht, daß der Grenzprozeß eine Seilkurve liefert, die in jedem Punkt eine Tangente besitzt. In Wirklichkeit ist nun dieses Ergebnis keineswegs selbstverständlich, und die übliche Ableitung der Seilkurve und ihrer Differentialgleichung erscheint vom mathematischen Standpunkt aus kaum in allen Punkten einwandfrei. Ob man sich in den Anfangsvorlesungen über technische Mechanik nicht doch mit dieser zwar nicht ganz strengen, aber sehr anschaulichen Herleitung begnügen soll, ist natürlich eine andere Frage!

Die kritische Stelle in der Untersuchung der Seilkurve ist die Frage nach der Existenz einer glatten Kurve als Grenzlage der Seilecke. Es ist zwar leicht zu sehen, daß bei unbegrenzter Vermehrung der Anzahl der Einzelkräfte, d. h. bei unendlicher Verfeinerung der Einteilung des Lastbereiches $a \ldots b$ die Anzahl der Seilecksecken unbegrenzt wächst und der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Seilecksseiten gegen null konvergiert. Damit ist jedoch noch nicht bewiesen, daß eine Grenzkurve existiert, die von der Art der Unterteilung des Bereiches und von der Art des Grenzüberganges unabhängig ist und in jedem Punkt eine Tangente besitzt. Ohne diesen Existenzbeweis ist aber die übliche Herleitung der Differentialgleichung der Seilkurve unvollständig; sie hat nur dann einen Sinn, wenn stillschweigend oder ausdrücklich vorausgesetzt wird, daß eine eindeutig bestimmte differentiierbare Grenzkurve existiert.

Nun läßt sich jener Existenzbeweis zwar rechnerisch leicht durchführen. Man braucht etwa nur die Gleichung eines beliebigen Seilstrahles aufzustellen, der zu einem der stetig verteilten Last äquivalenten System von n Einzelkräften gehört, und findet durch Grenzübergang unmittelbar die Gleichung der Seilkurve[1]). Besser als dieses analytische Verfahren scheint mir jedoch die folgende Überlegung in den Rahmen der graphischen Statik zu passen: Man fragt, ob sich einer stetig verteilten Last eine Kurve zuordnen läßt, die die entsprechenden Eigenschaften bezüglich der stetigen Belastung besitzt wie das Seileck für eine Anzahl von Einzelkräften. Genauer:

Gibt es eine zweimal stetig differentiierbare Funktion $y = f(x)$ mit der Eigenschaft, daß sich die in irgend zwei Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ an die entsprechende Kurve gelegten Tangenten auf der Mittellinie der zwischen den Abzissen x_1 und x_2 liegenden Last $\int_{x_1}^{x_2} \mu(x)\,dx$ schneiden?

[1]) Vgl. den Artikel: Allgemeine Statik . . . . von H. Reissner im Handbuch der physikalischen u. technischen Mechanik, Bd. I. Reissner bestimmt die Differentialgleichung der Seilkurve aus der Differenzengleichung des Seilecks.

Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die spez. Belastung $\mu(x)$ für $a \leq x \leq b$ stetig ist und positiv bis auf endlich viele Nullstellen. In den Anwendungen wird sich der Lastbereich stets so in eine Anzahl von Teilbereichen zerlegen lassen, daß diese Voraussetzung in jedem Teilbereich erfüllt ist.

Die Funktionalgleichung für die Seilkurve $y = f(x)$ lautet also:

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} x\,\mu(x)\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} \mu(x)\,dx} = \frac{x_2 f'(x_2) - x_1 f'(x_1) - f(x_2) + f(x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)} \quad (1),$$

für $a \leq x_1 \neq x_2 \leq b$. Durch Differentiation nach x_2 folgt

$$f''(x_2) \int_{x_1}^{x_2} x\,\mu\,dx + x_2\,\mu(x_2)\,[f'(x_2) - f'(x_1)]$$
$$= \mu(x_2)\,[x_2 f'(x_2) - x_1 f'(x_1) - f(x_2) + f(x_1)]$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \mu\,dx \cdot x_2 f''(x_2),$$

und indem man noch nach x_1 differentiiert:

$$- f''(x_2)\,x_1\,\mu(x_1) - f''(x_1)\,x_2\,\mu(x_2)$$
$$= - \mu(x_2)\,x_1 f''(x_1) - \mu(x_1)\,x_2 f''(x_2)$$

oder

$$[f''(x_2)\,\mu(x_1) - f''(x_1)\,\mu(x_2)]\,(x_2 - x_1) = 0,$$

für $a \leq x_1 \neq x_2 \leq b$. Wenn nun $\mu(x_1) \neq 0$, $\mu(x_2) \neq 0$ gilt, folgt sofort

$$\frac{f''(x_2)}{\mu(x_2)} = \frac{f''(x_1)}{\mu(x_1)} = \text{const},$$

also $f''(x) = c\,\mu(x)$; ist aber etwa $\mu(x_1) = 0$, dann folgt aus $-f''(x_1)\,\mu(x_2) = 0$ für beliebiges $x_2 \neq x_1$ $f''(x_1) = 0$, so daß für jeden Wert x ($a \leq x \leq b$)

$$f''(x) = c\,\mu(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gilt. Damit ist bewiesen: Wenn es eine dem Seileck entsprechende Seilkurve für die Kraftdichte $\mu(x)$ gibt, dann kann sie nur die Form

$$f(x) = c \int_a^x \int_a^x \mu(x)\,dx\,dx + \alpha x + \beta$$

haben, ist also geometrisch durch die Wahl des Poles und der Lage der Anfangstangente eindeutig festgelegt. Daß die zweite Integralkurve von $c\,\mu(x)$ tatsächlich der Funktionalgleichung (1) genügt, kann natürlich leicht verifiziert werden. Wichtiger ist aber die Einsicht, daß die Seilkurve als Grenzlage der Seilecke konstruiert werden kann, weil jedes Seileck Tangentenpolygon der Grenzkurve sein muß; das folgt jetzt streng aus der in der Funktionalgleichung festgelegten Forderung in Verbindung mit Gl. (2). Damit ist dann ein exakter Zugang zu den üblichen rein zeichnerischen Verfahren gewonnen.

Freiberg. G. Grüß. 560

Zur angenäherten Auflösung linearer Gleichungssysteme mittels Iteration. Wir knüpfen an den zusammenfassenden Bericht von R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer: „Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung"[1]) an und übernehmen die dortigen Bezeichnungen. Im Anschluß an den dort[2]) ausgesprochenen Satz, daß das Iterationsverfahren, in bekannter Weise angewandt auf ein in „aufgelöste" Form gebrachtes lineares Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k_{11}\, x_1 + k_{12}\, x_2 + \ldots + k_{1n}\, x_n + s_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = k_{n1}\, x_1 + k_{n2}\, x_2 + \ldots + k_{nn}\, x_n + s_n \end{array}\right\} \quad . \quad (1),$$

kurz:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1'),$$

dann und nur dann konvergiert, wenn die Eigenwerte λ' der Matrix $\mathfrak{K}$ sämtlich Beträge kleiner als Eins haben: $|\lambda'| < 1$, wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Folge der iterierten Vektoren

$$\mathfrak{x}^{(\nu+1)} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{x}^{(\nu)} + \mathfrak{s}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad (2)$$

monoton und unabhängig von der Wahl des Anfangsvektors $\mathfrak{x}^{(0)}$ gegen den Fixvektor[3]) $\mathfrak{x}$ konvergiert, ist die, daß die quadratische Form $\sum\limits_{p,q} (\sum\limits_s k_{sp}\, k_{sq})\, u_p\, u_q - \sum\limits_p u_p^2$ mit der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}'\mathfrak{K} - \mathfrak{E}$[4]) negativ definit ist: $\sum\limits_{p,q} f_{p,q}\, u_p\, u_q < 0$.

Dabei verstehen wir unter monotoner Konvergenz der Vektorfolge (2), daß die Folge der absoluten Beträge der Fehlervektoren $\mathfrak{z}^{(\nu)} = \mathfrak{x}^{(\nu)} - \mathfrak{x}$, also auch die Zahlenfolge:

$$|\mathfrak{z}^{(\nu)}|^2 = |\mathfrak{x}^{(\nu)} - \mathfrak{x}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(\nu)} - x_i)^2, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad (3)$$

monoton gegen Null konvergiert:

$$|\mathfrak{z}^{(\nu+1)}|^2 < |\mathfrak{z}^{(\nu)}|^2, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad . \; . \quad (4),$$

$$\lim_{\nu \to \infty} |\mathfrak{z}^{(\nu)}|^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Geometrisch veranschaulicht, lautet Forderung (4) folgendermaßen: Der Punkt $P^{(\nu+1)}$ des n-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $x_1^{(\nu+1)}$, $x_2^{(\nu+1)}, \ldots, x_n^{(\nu+1)}$ soll immer näher zum „Fixpunkt" P mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liegen, als der Punkt $P^{(\nu)}(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$, wie auch der Anfangspunkt $P^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ und die Ordnung der Iteration ν gewählt werden. Diese Forderung deckt sich im allgemeinen mit der Forderung nach Konvergenz schlechthin nicht, wie wir noch sehen werden; in einem wichtigen Spezialfalle jedoch, nämlich im Falle, daß die Matrix $\mathfrak{K}$ symmetrisch ist: $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$ decken sich beide Forderungen, wie leicht zu beweisen, so daß in diesem Falle unsere im Satz 1 ausgesprochene Konvergenzbedingung mit der von Mises-Pollaczek $|\lambda'| < 1$ identisch werden muß. Letzteres wollen wir, um den Anschluß an die bisherigen Untersuchungen gleich hervortreten zu lassen, sofort nachweisen; wir werden dann einen direkten Beweis für die Identität der beiden Forderungen im Falle der Symmetrie von $\mathfrak{K}$ bringen.

[1]) ZAMM, Bd. 9 (1929), S. 58.
[2]) S. 67 bis 68.
[3]) Darunter verstehen wir den Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ des Gleichungssystems (1').
[4]) $\mathfrak{K}'$ bedeutet die zu $\mathfrak{K}$ transponierte Matrix: $k'_{pq} = k_{qp}$, $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix.

Die Bedingung, daß die quadratische Form mit der Matrix $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}'\mathfrak{K} - \mathfrak{E}$ negativ definit sein soll, ist nämlich identisch damit, daß die Eigenwerte μ von $\mathfrak{F}$ negativ sein sollen: $\mu < 0$. Andererseits ist im Symmetriefalle $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}^2 - \mathfrak{E}$, also die Matrix $\mathfrak{F}$ eine ganze rationale Funktion der Matrix $\mathfrak{K}$. Einem bekannten Satze des Matrizenkalküls zufolge[5]) gilt daher $\mu = \lambda'^2 - 1$, und aus dieser Gleichung folgt die Äquivalenz der beiden Bedingungen $|\lambda'| < 1$ und $\mu < 0$.

Wir beweisen nun den Satz 1 und machen hierzu dieselbe Voraussetzung wie in dem genannten Bericht, nämlich, daß die Determinante des Gleichungssystems (1) nicht verschwindet[6]); außerdem beschränken wir die Koeffizienten k_{pq}, sowie die Vektoren $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ auf das reelle Gebiet. Durch Subtraktion des Fixvektors $\mathfrak{x} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{s}$ vom ν-ten iterierten Vektor $\mathfrak{x}^{(\nu)} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{x}^{(\nu-1)} + \mathfrak{s}$ erhalten wir eine homogene Gleichung für den Fehlervektor $\mathfrak{z}^{(\nu)} = \mathfrak{x}^{(\nu)} - \mathfrak{x}$:

$$\mathfrak{z}^{(\nu)} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{z}^{(\nu-1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

und daraus geht in bekannter Weise hervor, daß es nur auf die Matrix $\mathfrak{K}$ bei der Konvergenzuntersuchung ankommt, da die Forderungen (4) und (5) sich nur auf den Fehlervektor beziehen. Wir betrachten nunmehr die homogene affine Abbildung des n-dimensionalen $\mathfrak{u}$-Raumes auf den $\mathfrak{v}$-Raum:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{K}\,\mathfrak{u}, \quad \text{oder} \quad v_p = \sum_q k_{pq}\, u_q \quad . \; . \quad (7)$$

und sehen, daß Forderung (4) mit der folgenden gleichwertig ist.

$$|\mathfrak{v}|^2 < |\mathfrak{u}|^2, \quad \text{oder} \quad \sum_p v_p^2 < \sum_p u_p^2 \; . \; . \; . \quad (8)$$

identisch gültig für alle $\mathfrak{u}$.

Setzen wir (7) in (8) ein, so erhalten wir $\sum\limits_p (\sum\limits_q k_{pq}\, u_q)^2 - \sum\limits_p u_p^2 < 0$ oder:

$$\sum_{p,q} f_{pq}\, u_p\, u_q = \sum_{p,q} (\sum_s k_{sp}\, k_{sq})\, u_p\, u_q - \sum u_p^2 < 0 \quad (9).$$

Dies ist also eine notwendige Bedingung. Damit sind folgende Bedingungen gleichwertig:

$$D_1 < 0, \; D_2 > 0, \; D_3 < 0 \text{ usw.} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

alternierend bis $D_n = |f_{ik}| < 0$ für ungerades n bzw. $D_n > 0$ für gerades n. Dabei bedeuten D_i, $i = 1, \ldots, n$ Hauptunterdeterminanten i-ter Ordnung, die in der linken oberen Ecke der Determinante $|f_{ik}|$ stehen[7]):

$$D_i = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1i} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2i} \\ \vdots & & & \\ f_{i1} & f_{i2} & \ldots & f_{ii} \end{vmatrix}, \; i = 1, 2, \ldots, n \quad . \quad (11).$$

Wir zeigen nun, daß die Bedingung (9) bzw. (10) auch hinreichend ist, d. h., daß $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathfrak{z}^{(\nu)} = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\lim\limits_{\nu \to \infty} |\mathfrak{z}^{(\nu)}|^2 = 0$ ist, indem wir eine Oberreihe zur Reihe der $|\mathfrak{z}^{(\nu)}|^2$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ aufstellen. Zunächst beachten wir, daß aus (9) rückwärts wieder (8) folgt. Jetzt be-

[5]) Vgl. R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 19. Man beachte, daß, was wir hier Eigenwert nennen, dort charakteristische Zahl heißt.
[6]) Also $|k_{pq} - e_{pq}| \neq 0$, wobei $(e_{pq}) = \mathfrak{E}$ ist, oder, anders ausgedrückt, daß die Eigenwerte λ' von $\mathfrak{K}$ von Eins verschieden sind.
[7]) Vgl. etwa E. Pascal: Repertorium der höheren Mathematik I, 1, S. 475.

trachten wir das Maximum von $\frac{|\mathfrak{v}|^2}{|\mathfrak{u}|^2}$, wobei $\mathfrak{v}$ durch Gl. (7) definiert ist, und nehmen zunächst die Nebenbedingung $|\mathfrak{u}|^2 = \text{konst} = r^2$ hinzu; wir betrachten also die n-dimensionale Kugel im Raume der $\mathfrak{u}$ mit dem Halbmesser r. Auf dieser Kugel besitzt die Größe $|\mathfrak{v}|^2$ ein positives Maximum, welches nach Zeugnis der Beziehung (8) kleiner ist als $|\mathfrak{u}|^2 = r^2$. Wir bezeichnen dieses Maximum, das eine Funktion von r ist, mit $M^2(r)$. Aus den Eigenschaften der quadratischen Formen folgt aber:

$$M^2(r) = M^2(1) \cdot r^2 \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

wovon man sich durch eine elementare Rechnung überzeugt[8]). Wir können also schreiben:

$$|\mathfrak{v}|^2 \leq M^2(r) = M^2(1) \cdot r^2 < |\mathfrak{u}|^2 = r^2 \quad . \quad (13),$$

oder:

$$\frac{|\mathfrak{v}|^2}{|\mathfrak{u}|^2} \leq M^2(1) < 1 \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

In (14) haben wir nun Beziehungen gewonnen, die identisch für alle $\mathfrak{u}$ gelten, da in denselben r herausgefallen ist.

Wir bilden jetzt die Reihe:

$$|\mathfrak{z}^{(0)}|^2,\ M^2(1)\,|\mathfrak{z}^{(0)}|^2,\ M^4(1)\,|\mathfrak{z}^{0}|^2, \ldots,\ M^{2\nu}(1) \cdot |\mathfrak{z}^{0}|^2 \quad (15)$$

und vergleichen damit die Reihe:

$$|\mathfrak{z}^{(0)}|^2, \qquad |\mathfrak{z}^{(1)}|^2, \qquad |\mathfrak{z}^{(2)}|^2, \ldots, \qquad |\mathfrak{z}^{(\nu)}|^2 \quad (16).$$

Jedes Glied der letzteren Reihe entsteht aus dem Voraufgehenden durch Anwendung der Transformation (7). Aus (13) folgt daher:

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{z}^{(\nu)}|^2 < M^2(1)\,|\mathfrak{z}^{(\nu-1)}|^2 < M^4(1)\,|\mathfrak{z}^{(\nu-2)}|^2 \\ \qquad < \ldots < M^{2\nu}(1)\,|\mathfrak{z}^{(0)}|^2 \end{array}\right\} \quad . \quad (17).$$

Somit ist die Reihe (15) eine Oberreihe zur Reihe (16), und da (15) als geometrische Reihe wegen $M^2(1) < 1$ den Grenzwert Null hat, so hat auch die Reihe der Fehlervektoren denselben Grenzwert, womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Wir beweisen nunmehr auf direktem Wege folgenden

Satz 2. Wenn die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}$ des Gleichungssystems (1) symmetrisch ist, ist die Konvergenz des Iterationsverfahrens, falls sie für jede Wahl des Anfangsvektors $\mathfrak{x}^{(0)}$ stattfindet, immer monoton.

Wir führen den Nachweis rein anschaulich. Die homogene nicht ausgeartete, jetzt rein affine Abbildung (7) führt jede n-dimensionale Kugel in ein ebensolches Ellipsoid über, dessen Hauptachsen in die Fixgeraden der Abbildung fallen. Wäre nun die Konvergenz nicht monoton, so müßte für irgendeinen Punkt der zugehörige Halbmesser des Ellipsoides größer sein als der Halbmesser der abgebildeten Kugel. Dann müßte aber auch mindestens eine der Hauptachsen des Bildellipsoides ebenfalls größer sein als der Halbmesser der Kugel. Wir brauchten dann nur den Anfangsvektor auf der dieser Hauptachse entsprechenden Fixgeraden zu wählen, um einen Fall von Divergenz des Iterationsverfahrens zu erhalten, womit auch Satz 2 bewiesen ist.

[8]) Man forme $|\mathfrak{v}|^2$ folgendermaßen um:

$$|\mathfrak{v}|^2 = \sum_i v_i^2 = \sum_{p,q} (\sum_s k_{sp}\, k_{sq})\, u_p\, u_q = \sum_{p,q} g_{pq}\, u_p\, u_q$$

$$= \sum g_{pq} \frac{u_p}{\sqrt{\sum_s u_s^2}} \cdot \frac{u_q}{\sqrt{\sum_s u_s^2}} \sum u_s^2$$

$$= \left(\sum g_{pq} \frac{u_p}{r} \cdot \frac{u_q}{r} \right) \cdot r^2 .$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, daß auf jedem Strahle $\frac{u_p}{r} = \alpha_p$ die Form $|\mathfrak{v}|^2$ für alle α_p proportional r^2 ist, woraus Gl. (12) folgt.

Diese Überlegung führt im Falle, daß die Matrix $\mathfrak{K}$ nicht symmetrisch ist, zur Einsicht, daß sich im allgemeinen die beiden Forderungen: nach Konvergenz schlechthin und nach monotoner Konvergenz nicht decken, daß also auch die Mises-Pollaczeksche Konvergenzbedingung mit der Konvergenzbedingung (9) bzw. (10), im Falle die Matrix $\mathfrak{K}$ nicht symmetrisch ist, nicht gleichwertig ist. Es genügt, ein Beispiel zu betrachten:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Hier ist die Bedingung $|\lambda'| < 1$ erfüllt: $\lambda'_1 = 0{,}6$; $\lambda'_2 = 0{,}8$, es muß also Konvergenz stattfinden; daß die Konvergenz nicht monoton ist, liegt auf der Hand, und in der Tat ist die Bedingung (10) nicht erfüllt. An diesem Beispiel erkennt man, daß das Kriterium (10) für schnelle Konvergenz maßgebend ist.

Berlin. Boris Germansky. 344

Formänderung und Beanspruchung dünner kreiszylindrischer Ringe und Rohre.

Die interessanten Ausführungen des Herrn Dr. Gercke in obigem Artikel[1]) regen dazu an, das gleiche Problem einmal durch eine Näherungsrechnung zu behandeln, wobei durch die von Gercke gebrachten Lösungen der Differentialgleichung (2) für die verschiedenen Belastungsfälle die strengen Resultate mit den Näherungswerten verglichen werden können.

Aus der Integralfunktion, die die Summe der Arbeiten darstellt:

$$F = -1/2\, E\, J\, y''^2 - 1/2\, E \cdot s \cdot y^2/r^2 + q \cdot y + p \cdot y_1$$

ergibt sich mit den gleichen Bezeichnungen der Abhandlung vermittels des Lagrangeschen Schemas

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_{xx} - \ldots = 0,$$

die Differentialgleichung des Problems:

$$E\, J \cdot y'''' + E \cdot s/r^2\, y - q = 0,$$

worin auch für $J = 1/12\, s^3$ gesetzt werden kann. Das Extremalintegral lautet daher:

$$J_n = -1/2 \int_0^l E\, J\, y''^2\, dx - 1/2 \int_0^l E \cdot s \cdot y^2/r^2\, dx + \int_0^l q \cdot y\, dx + p \cdot y_1 .$$

Wählt man z. B. den Belastungsfall II, 2 aus, d. h. betrachtet man den einseitig eingespannten Ring mit innerer Belastung, so gelten die Randbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \quad \underline{y = 0} \quad \underline{y' = 0} \quad y'' \neq 0,$$

$$\text{für } x = 1 \quad y \neq 0 \quad y' \neq 0 \quad \underline{y'' = 0} \quad \underline{y''' = 0}.$$

Verzichtet man auf die letzte Bedingung (Scherkräfte $= 0$) und wählt man den Ritzschen Ansatz nach Funk so, daß die höheren Ableitungen von y durch Polynomreihen dargestellt werden, z. B.

$$y'' = a_1 \cdot (1 - x/2),$$

so genügt die Funktion $y = a_1 \cdot (x^2/2 - x^3/62)$ den gestellten Randbedingungen in erster Näherung. Die a_1 werden bekanntlich durch partielle Differentiation bestimmt, also

$$a_1 = \frac{1/8\, q \cdot l^2}{E \cdot (J/3 + s/r^2\, 11/420\, l^4)},$$

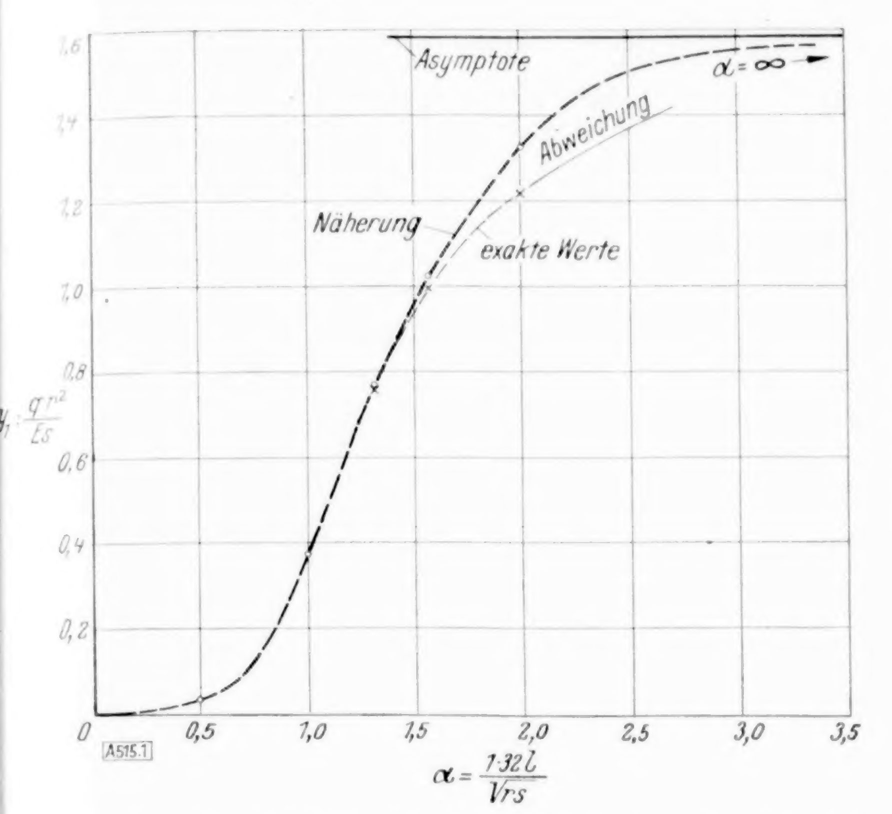
[1]) ZAMM Bd. 14 (1934) S. 313 bis 315.

mit dem Wert von J ergibt sich dann für die größte Auslenkung y_1

$$y_1 = \frac{q \cdot r^2}{E \cdot s} \cdot \frac{1/3 \cdot 0{,}125}{(1/36 \cdot 1{,}32/\alpha^4 + 11/420)}$$

mit

$$\alpha = \frac{1{,}32 \cdot 2}{\sqrt{r \cdot s}}.$$



In der beiliegenden Abbildung ist der Verlauf dieser ersten Näherung gegenüber dem richtigen Wert nach Gercke dargestellt. Bemerkenswert ist die nur ganz geringfügige Abweichung bei kleineren $\alpha\,(0 \rightarrow \pi/2)$, so daß für den praktischen Gebrauch die Näherung einige Bedeutung haben kann, da sie beliebige Kombinationen der Belastungsfälle gestattet.

Berlin-Siemensstadt. Herbert Melan. 515

Über das Quadratwurzelziehen mit der Rechenmaschine. Für das Ausziehen der Quadratwurzel auf der Rechenmaschine sind eine Reihe von Verfahren ausgebildet worden[1]), die jedoch mit der im folgenden beschriebenen Methode nicht konkurrieren können, wenn die Quadratwurzel auf sehr viele Dezimalstellen berechnet werden soll.

Um aus der positiven Zahl a (durch Multiplizieren mit einer geeigneten Zehnerpotenz läßt sich $a > 1$ erreichen) die Quadratwurzel zu ziehen, wähle man einen möglichst einfachen Näherungsbruch b für $\sqrt{a}$; man kann oft für b die $\sqrt{a}$ nächstgelegene ganze Zahl nehmen. Es ist jedenfalls

$$b - \sqrt{a} = \varepsilon \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{2}, \quad b \geqq 1 \quad . \quad . \quad (1)$$

erreichbar. (1) wird in die zweite und in höhere Potenzen erhoben:

$$(b^2 + a) - 2b\sqrt{a} = b_2 - c_2\sqrt{a} = \varepsilon^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n - c_n\sqrt{a} = \varepsilon^n,$$

wo b_n, c_n monoton wachsende Zahlen sind. Sind a und b ganzzahlig, so sind auch alle b_n und c_n ganzzahlig. Das Verfahren wird je nach dem vorliegenden Genauigkeitsbedürfnis abgebrochen, spätestens aber dann, wenn c_{n+1} mehr geltende Stellen hat, als das Einstellwerk der Rechenmaschine faßt. Es ist

$$\sqrt{a} = \frac{b_n}{c_n} - \frac{\varepsilon^n}{c_n}.$$

Der Fehler $\frac{\varepsilon^n}{c_n}$ des Näherungsbruches $\frac{b_n}{c_n}$ für $\sqrt{a}$ geht mit wachsendem n wegen $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$ gegen 0. $\frac{\varepsilon^n}{c_n}$ läßt sich leicht der Größenordnung nach abschätzen; ist $\frac{\varepsilon^n}{c_n}$ etwa 10^{-m}, so berechnet man $\frac{b_n}{c_n}$ nicht nur auf m Dezimalstellen, sondern auf eine Anzahl mehr Stellen, die mittels genauerer Berechnung von $\frac{\varepsilon^n}{c_n}$ korrigiert werden. Da die Division auf viele Stellen, wenn nur der Divisor im Einstellwerk eingestellt werden kann, mit den meisten handelsüblichen Rechenmaschinen sehr bequem durchgeführt werden kann (der Rest wird wieder nach vorne gebracht), eignet sich diese Methode besonders für die Rechenmaschine.

Die hier beschriebene Methode des Quadratwurzelziehens hat vor vielen anderen die Vorteile:

1. man kann mit ihr eine Quadratwurzel leicht auf die **dreifache** Zahl geltender Stellen berechnen, als das Einstellwerk Stellen faßt,
2. man hat eine genaue Fehlerabschätzung.

Es bestehen Beziehungen dieses Verfahrens zum Newtonschen Verfahren[2]): Berechnet man vom Näherungswert $b = x_0$ ausgehend Näherungen x_ν für die Wurzel $\sqrt{a}$ der Gleichung

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

nach dem Newtonschen Verfahren

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots),$$

so ist

$$x_\nu = \frac{b_n}{c_n} \qquad \text{für} \qquad n = 2^\nu.$$

Bei fortgesetztem Quadrieren von (1) würde man also als Näherungen $\frac{b_n}{c_n}$ dieselben wie bei dem Newtonschen Verfahren erhalten; durch die Möglichkeit von Näherungen $\frac{b_n}{c_n}$, bei denen n zwischen zwei aufeinanderfolgenden Potenzen von 2 liegt, läßt sich jedoch möglichste Übereinstimmung zwischen der Stellenzahl des Nenners und der des Einstellwerks der Rechenmaschine, also möglichst gute Ausnutzung der Maschine, erzielen.

Mehr als viele Worte werden zwei Beispiele sagen, die beide mit einer Rechenmaschine mit achtstelligem Einstellwerk gerechnet werden können:

Beispiel 1: $a = 6$.

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{6} - 2 &= \varepsilon \\ 6 - 4\sqrt{6} + 4 = 10 - 4\sqrt{6} &= \varepsilon^2 \\ 5 - 2\sqrt{6} &= \frac{\varepsilon^2}{2} = \delta \\ 49 - 20\sqrt{6} &= \delta^2 \\ 4801 - 1960\sqrt{6} &= \delta^4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2),$$

[1]) Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, 1928, S. 39. — K. Goldziher: Bemerkungen zur angenäherten Wurzelberechnung, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6 (1926), S. 325 bis 327. — St. Bergmann: Das Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 2 (1922), S. 316 bis 317.

[2]) Herr Prof. Dr. E. Trefftz war so liebenswürdig, mich auf diese Beziehungen hinzuweisen.

$$46099201 - 18819920\sqrt{6} = \delta^8 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

$$\frac{46099201}{18819920} = 2{,}44948\ 97427\ 83178\ 67451\ 08374 \quad . \; (4).$$

Nach (2) ist

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 &= 0{,}01020\ 51443\ 3 \\ \delta^4 &= 0{,}00010\ 41449\ 71 \\ \frac{\delta^8}{18819920} &= 0{,}0^{15}\ 57631\ 35529 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (5).$$

Von dem Bruch (4) stimmen also 15 Stellen mit $\sqrt{6}$ überein, also sind alle angegebenen Stellen von δ^2 und damit von (5) richtig, und auf 25 geltende Stellen genau gilt nach (3):

$$\sqrt{6} = 2{,}44948\ 97427\ 83178\ 09819\ 7284 .$$

Beispiel II:

$$a = \pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 833 .$$

Zunächst verschaffen wir uns einen auf 8 Stellen richtigen Näherungswert, etwa mittels der Methode, aus dem Näherungswert a_n für $\sqrt{a}$ den besseren Wert

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$$

zu erzeugen. Hier wird $a_1 = 1{,}8$ gesetzt, dann ist $a_2 = 1{,}7726$; $a_3 = 1{,}77245\ 3857$.

Weitere a_n werden nicht berechnet, da dieses Verfahren nur die doppelte Anzahl geltender Stellen liefert, als das Einstellwerk Stellen hat. Die dreifache Anzahl geltender Stellen liefert unser Ansatz

$$1{,}77245\ 385 - \sqrt{\pi} = \varepsilon$$

$$b_2 - c_2\sqrt{\pi} = 6{,}28318\ 53039\ 69615\ 73846\ 26433\ 833$$
$$- 3{,}54490\ 77\sqrt{\pi} = \varepsilon^2$$

$$\frac{b_2}{c_2} = 1{,}77245\ 38509\ 05516\ 02752\ 94737\ 246 ,$$

also

$$\varepsilon = 0{,}0^9\ 9\ 05516\ 027$$

$$\frac{\varepsilon^2}{c_2} = 0{,}0^{18}\ 23\ 13062\ 41 ,$$

mithin gilt auf 27 geltende Stellen genau

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 81674\ 8 .$$

Berlin, Institut für angewandte Mathematik.

Lothar Collatz. 517

BUCHBESPRECHUNGEN

Aerodynamic Theory, A General Review of Progress. Under a Grant of the Guggenheim Fund for the Promotion of Aeronautics hrsg. v. William Frederic Durand. Verlag Julius Springer, Berlin.

Im Verlag von Julius Springer, Berlin, erscheint in englischer Sprache mit Unterstützung des „Guggenheim Fund for the Promotion of Aeronautics" ein Handbuch „Aerodynamic Theory", als dessen Herausgeber W. F. Durand zeichnet. In sechs Bänden wird dieses Handbuch die gesamte flugtechnische Strömungslehre und ihre Anwendung auf Flugzeug und Luftschiff behandeln. Es ist dem Herausgeber gelungen, für die Bearbeitung der einzelnen Abschnitte die ersten Fachleute und Forscher zu gewinnen. Die Durchführung dieses groß angelegten Unternehmens, das die Ergebnisse der bisherigen Forschungen allgemein zugänglich macht, wird sowohl den wissenschaftlichen Fortschritt als die Anwendung der Theorie auf die Praxis fördern. Der Herausgeber, die Autoren und der Verlag haben sich damit ein unzweifelhaftes Verdienst erworben.

Band I. W. F. Durand, Mathematical Aids. Fluid Mechanics I. Max M. Munk, Fluid Mechanics II. R. Giacomelli und E. Pistolesi, Historical Sketch. XV + 398 S. mit 151 Abb. Berlin 1934. Julius Springer. Preis geb. 20 M.

Im ersten Abschnitt, Mathematical Aids, stellt F. W. Durand die mathematischen Hilfsmittel einfach und anschaulich dar. Die Disposition könnte etwas klarer sein: Teil V über zweidimensionale Vektoren und Teil X über konforme Abbildung gehören sachlich zum Teil I über komplexe Veränderliche, Teil IX über den Gaußschen und Stokesschen Satz zu Teil VI über Vektorfelder. Einige Kleinigkeiten sind verbesserungsbedürftig, z. B. eine befremdliche Umkehrung partieller Differentialquotienten auf S. 2. — Im ganzen ist der Verfasser aber der schwierigen Aufgabe gerecht geworden, in einem kurzen Abschnitt eine Ergänzung zu den mathematischen Kenntnissen zu entwickeln, die er bei seinen Lesern voraussetzt.

Der zweite Abschnitt, ebenfalls von W. F. Durand, enthält die Grundlagen für die Behandlung zweidimensionaler Strömungsprobleme, und zwar die elementaren Fälle und die daraus durch Superposition und einfache konforme Abbildungen erzeugten Strömungen. Dazu kommt ein Abschnitt über axialsymmetrische Strömungen, der sich zum Teil mit den Darlegungen des dritten Abschnitts überschneidet. Dieser klassische Stoff ist sehr lesbar dargestellt, so daß der Abschnitt eine gute Einführung in das behandelte Gebiet liefert. Desgleichen der letzte Abschnitt über Aerostatik (hydrostatischer Auftrieb und Barometerformel).

Im dritten Abschnitt bringt M. Munk zunächst die Grundlagen der Kinematik und Dynamik der Flüssigkeitsbewegung, insbesondere die Helmholtzschen Sätze. Die Ableitung der letzteren ist etwas umständlich. Auch kann der Referent sich dem Verfasser nicht anschließen, wenn er die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen nach der Seite negativer Koordinaten weisen läßt und dem skalaren Vektorprodukt das entgegengesetzte Vorzeichen zuteilt, wie es sonst üblich ist. Im weiteren gibt der Verfasser eine sehr klare Darstellung der Sätze über feste Körper in einer Flüssigkeit und der lösbaren, dreidimensionalen Potentialprobleme (axiale und seitliche Strömung um Rotationskörper und Strömung um beliebige Ellipsoide).

Der vierte und letzte Abschnitt des Bandes enthält — aus der Feder von R. Giacomelli und E. Pistolesi — einen historischen Abriß über die Entwicklung der Mechanik der Flüssigkeiten. Er ist in drei Abschnitte unterteilt: Vom Altertum bis zum Ende des 17. Jahrhunderts, vom Ende des 17. bis zum Ende des 19. Jahrhunderts und vom Ende des 19. Jahrhunderts bis zur Jetztzeit. Der Abriß ist wirklich fesselnd geschrieben. Da er auch für solche Leser lesenswert ist, die sich nicht in die Einzelfragen der Aeromechanik vertiefen wollen, hätte man ihn an die Spitze des Werkes stellen können.

Die angegebenen Preise von 20 M. erhöhen sich ab 1. 4. 1936 auf 28 M. pro Band.

Band II. Th. von Kármán und J. M. Burgers, General Aerodynamic Theory. Perfect Fluids. XV + 367 S. mit 113 Abb. und 4 Bildtafeln. Berlin 1935, Julius Springer. Preis 20 M.

Band II gibt eine umfassende Darstellung der Theorie von Auftrieb und (induziertem) Widerstand in einer reibungslosen Flüssigkeit. Nach einer Einleitung beschreibender Art wird zunächst die ebene Potentialströmung besprochen (Kap. II). Es folgt das III. Kapitel mit den mathematischen Grundlagen für die Theorie der Tragflügel endlicher Spannweite. Ausgangspunkt ist die Vorstellung, daß der tragende Körper durch Kräfte ersetzt werden kann, die an seiner Stelle in der Strömung wirken. Hierfür werden die Bewegungsgleichungen näherungsweise integriert, das Feld der induzierten Geschwindigkeiten und der induzierte Widerstand wird berechnet und die allgemeinen Sätze (Munk) gewonnen. Den Abschluß bildet die Ableitung des Kutta-Joukowskischen Theorems für Tragflügel endlicher Spannweite. — Das IV. Kapitel ist der speziellen Tragflügeltheorie gewidmet, insbesondere der Berechnung des Ein- und Mehrdeckers auf Grund der Theorie der tragenden Linie. Es schließt mit einem Abschnitt über den Einfluß von Wänden auf die Strömung (z. B. Windkanalwände). Die letzten drei Kapitel beschäftigen sich weniger ausführlich mit besonderen Problemen: Kap. V mit dem Tragflügel in beschleunigter und krummliniger Bewegung, Kap. VI mit dem Aufrollen des Wirbelbandes, Kap. VII mit der Strömung und der Widerstandstheorie bei abgerissener Strömung (Diskontinuitätsflächen, Wirbelstraßen, Oseensche Theorie).

Wie die Inhaltsangabe zeigt, ist die Theorie des Tragflügels umfassend und auf breiter Grundlage entwickelt. Die Darstellung ist auch leicht lesbar; übergroße Anforderungen mathematischer Art werden nicht an den Leser gestellt. Im übrigen kann man sich kurz fassen: Der Band erfüllt die Erwartungen, die die Namen der beiden Verfasser erwecken.

Band III. C. Witoszynski und M. J. Thompson, The Theory of Single Burbing. L. Prandtl, The Mechanics of Viscous Fluids. G. I. Taylor, The Mechanics of Compressible Fluids. A. Toussaint und E. Jacobs, Experimental Methods. Wind Tunnels. XIV + 354 S. mit 167 Abb. und 6 Bildtafeln. Berlin 1935, Julius Springer. Preis geb. 20 M.

Im ersten Kapitel wird die Witoszynskysche Theorie für die zweidimensionale Strömung um ein Tragflächenprofil dargestellt. Es handelt sich dabei um den Versuch einer Darstellung der Strömung durch komplexe Potentiale, wobei zwischen zwei von der Hinterkante ausgehenden Stromlinien eine Art Totwasser entsteht, dessen dynamische Verhältnisse nicht näher untersucht werden. Die Darstellung ist durchsichtig. Bei der Eigenart der Theorie, die manchen Einwänden ausgesetzt ist, wäre es erwünscht, wenn an Hand experimenteller Daten gezeigt würde, wie dieselbe sich mit der Erfahrung vergleicht.

Im zweiten Abschnitt behandelt L. Prandtl die Mechanik zäher Flüssigkeiten. Der Stoff ist gewissermaßen nach wachsenden Reynoldsschen Zahlen gegliedert: Grundlagen. Navier-Stokessche Gleichungen. Ähnlichkeit, Reynoldssche Zahl. Exakte Lösungen. Die sehr langsame Bewegung (Stokes, Oseen). Grenzschicht (Prandtl, Kármán). Ausgebildete Turbulenz. Mischungsweg und Geschwindigkeitsverteilung. Randreibung. Rohr und Platte. Ausbreitungsvorgänge u. ä. Turbulenzentstehung. Widerstand bewegter Körper. —

Der dritte Abschnitt bringt eine Darstellung der Mechanik kompressibler Flüssigkeiten von G. I. Taylor und J. W. Maccoll. Nach einem einleitenden Kapitel über die Ausbreitung ebener Störungen kleiner und großer Amplitude wird die eindimensionale Strömung in Rohren und die quasi-eindimensionale Strömung in Rohren variablen Querschnitts behandelt. Es folgt die zweidimensionale Strömung unterhalb (Kap. 3) und oberhalb (Kap. 4) der Schallgeschwindigkeit.

Das letzte Kapitel des Bandes befaßt sich mit den experimentellen Methoden. Im ersten Teil gibt A. Toussaint eine Beschreibung der Meßmöglichkeiten im natürlichen Wind und im Windkanal. Die verschiedenen Windkanaltypen werden beschrieben und der Energiebedarf sowie der Einfluß der Abmessungen des Luftstroms werden diskutiert. Im zweiten Teile berichtet K. Jacobs über den Einfluß des Modellmaßstabes und über die Meßmethoden bei hohen Geschwindigkeiten.

Ebenso wie Band II behandelt auch dieser Band des Handbuches Forschungsgebiete, an deren Entwicklung die Autoren selbst wesentlichen Anteil genommen haben. Die Darstellung dieser Gebiete von berufenster Seite darf natürlich besonderes Interesse beanspruchen. Trefftz. 575

Dr. HANS **GEBELEIN** VDI, Turbulenz, Physikalische Statistik und Hydrodynamik. VII + 177 S. m. 40 Textabb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 12,50 M., geb. 14 M.

Der Verfasser macht den Versuch, auf Grund der Kolmogoroffschen Ansätze eine statistische Theorie der Turbulenz zu entwickeln. Im ersten Teil des Buches werden die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen dargestellt, insbesondere die Kolmogoroffschen Differentialgleichungen abgeleitet. Der Kernpunkt der Untersuchung beschäftigt sich mit der Frage, wie der physikalische Zustand der turbulenten Strömungen zu den formalen Größen der Kolmogoroffschen Differentialgleichungen in Beziehung zu setzen ist, was physikalisch auf bestimmte Aussagen über die Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeit bzw. eine Art freie Weglänge hinausläuft. Die Darlegungen des Verfassers sind nicht ganz überzeugend. An die Stelle strenger Deduktion treten hier und da wortreiche Erklärungen, die den Leser über den Gültigkeitsbereich der Resultate im Zweifel lassen. Die Energie, mit der der Verfasser das schwierige Problem anpackt, verdient Anerkennung. Trefftz. 575

GEORG **PRANGE**, o. Prof. an der Techn. Hochschule Hannover, Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Heft IV 12 u. 13 der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. 300 S. Leipzig 1935, B. G. Teubner Verlag. Preis 12,20 M.

Mit diesem Heft ist Band IV der Enzyklopädie bis auf ein Registerheft [1]) und damit das ganze Werk abgeschlossen. Es ist also doch fertig geworden, allen Zweiflern zum Trotz. Man wird zunächst den Verlag zu diesem Ereignis beglückwünschen dürfen und ihm danken, daß er in rund vierzig Jahren das große Unternehmen trotz aller Schwierigkeiten durchgeführt hat. Man wird den an der Herausgabe beteiligten Akademien danken und allen Herausgebern und Mitarbeitern. Bei diesem, dem zuletzt fertiggewordenen Band also besonders C. H. Müller und dem Verfasser dieses Heftes, Prange. Ganz besonders aber wird man in Ehrfurcht des großen deutschen Mathematikers gedenken, Felix Klein, der Gedanken und Initiative zu dieser stolzen Schau mathematischer Arbeit gehabt hat und der dann dank seiner Energie das Werk so

[1]) Inzwischen ist auch das Registerheft erschienen. (Zusatz bei der Korrektur.)

fest begründet hat, daß es auch nach seinem Tode noch fertig geworden ist.

Dieses Heft besonders ist ein würdiger Abschluß. Es ist eine mit großer Sachkenntnis und umfassender Blickweite geschriebene Darstellung der analytischen Mechanik selbst. Denn wenn auch die Integrationsmethoden besonders zur Verhandlung stehen, so mußten doch auch die Ansätze noch einmal dargestellt werden. Der Artikel liest sich gut, er hält die richtige Mitte zwischen trockenem Bericht und ausführlichem Lehrbuch. Für den Sachkenner ist er eine Freude. Er gehört ebensosehr der reinen wie der angewandten Mathematik an und ist so im Sinne Kleins, der aus demselben Grunde die Mechanik besonders liebte, ein rechter Vermittler zwischen beiden. Es trifft sich gut, daß gleichzeitig das Buch von Carathéodory über Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erschienen ist, von beiden Werken kann man einen neuen Aufschwung der Pflege der analytischen Mechanik in Deutschland erhoffen.

Einzelheiten können natürlich bei einem so umfassenden und selbst schon berichtenden Werk nicht gegeben werden. Die Hauptabschnitte mögen genannt werden. A. Die Differentialgleichungen der Bewegung und ihr Ansatz mit Hilfe der Differentialprinzipien. B. Die Variationsprinzipien. C. Vorbereitende Ansätze zur allgemeinen Integrationstheorie. D. die variierte Wirkung. E. Die Integralinvarianten. F. Systematische Integration des kanonischen Systems. G. Die kanonische Transformation. H. Äquivalenzprobleme und Verwandtes.

Hamel. 542

Dr.-Ing. HORST **MÜLLER,** Privatdozent a. d. Techn. Hochsch. Hannover, Führer durch die technische Mechanik, eine neuartige Übersicht über ihre Grundlagen, Methoden und Ergebnisse für Studium und Praxis. VIII/118 S. m. 166 Textabb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 8,50 M.

Das Neuartige des Buches besteht darin, daß die Resultate nebeneinander ohne Ableitung oder nur mit kurzer, oft in eine Anmerkung verwiesener Ableitung hingeschrieben werden. Etwas mehr als eine Formelsammlung, für solche Leser bestimmt, die den Gegenstand schon einmal durchgearbeitet haben und sich nun schnell umsehen wollen. Ein vielleicht ganz nützliches Unternehmen, wenn das Buch richtig gebraucht wird, unter Umständen gefährlich, wenn es in die Hände von Studenten kommt, die etwa schon sowieso dazu neigen, nach Rezepten zu arbeiten. Denn es werden direkt Rezepte gegeben.

Dem Inhalte nach zerfällt das Buch in vier große Abschnitte: A. Vorbemerkungen, dabei Rechnen mit Vektoren und Differentiation und Integration zeichnerisch gegebener Kurven. B. Statik mit einem ziemlich umfangreichen Kapitel über Tragwerke, C. Kinematik und D. Kinetik. Der Inhalt entspricht i. a. dem Üblichen der Lehrbücher der technischen Mechanik. Es steigt auf bis zum Massenausgleich und zum Kreisel, von dessen Theorie ziemlich viel gebracht wird.

Ein solches Buch müßte nun besonders sorgfältig abgefaßt sein. Leider aber läßt es ziemlich zu wünschen übrig. Der Hauptfehler scheint dem Ref. darin zu liegen, daß die meisten Sätze nur für den starren Körper richtig sind, ohne daß dies aber irgendwo gesagt wird. Im Sachverzeichnis kommt das Wort starrer Körper überhaupt nicht vor, im Text scheint es auch nur im Anfang vorzukommen, wo in der Einteilung der Mechanik zwischen starr, elastisch oder plastisch und flüssig oder gasförmig unterschieden wird. Und dann kommen noch einmal starre Verbindungen vor. Aber gleich auf Seite 2 wird behauptet, daß Kraft und Winkelgeschwindigkeit linienflüchtige Vektoren seien, was doch nur beim starren Körper richtig ist. Vom Moment wird ebenda behauptet, daß es ein freier Vektor sei, was wiederum nur für den st. K. richtig ist, außerdem ist hier Kräftepaar gemeint; aber Moment und Kräftepaar werden andauernd verwechselt. Bei der ganzen Zusammensetzung der Kräfte steht wieder nicht, daß sie nur beim st. K. gilt, in der Kinetik wird die Sache beim D'Alembertschen Prinzip und beim Prinzip der virtuellen Arbeiten ganz schlimm. Das erste wird trivialisiert, das zweite zunächst auch, dann aber behauptet, es enthalte die sechs Gleichgewichtsbedingungen der Statik in einer Gleichung. Übrigens steht da noch $\delta A_{\text{ges}} = \delta T = 0$. Was ist denn überhaupt δT? In der Kinematik dieselbe Sache. Hier steht: Schraubung = Allgemeinste Bewegung. Aber nichts vom starren Körper.

An Einzelheiten sind Ref. noch aufgefallen — er hat nicht alles gelesen —: in Fig. 92 muß es heißen δr und nicht $\delta \mathfrak{r}$. $\delta \mathfrak{r}$ ist ganz etwas anderes, nämlich $\delta \mathfrak{s}$. Über Seilsteifigkeit steht auf Seite 103 die unmögliche Sache, die allerdings schlechtes Erbteil der Literatur ist.

Die Ausstattung ist wie immer bei Springer gut, einzelnes ist sicher brauchbar, auch ist die große Zahl der Abbildungen zu loben, aber das Buch müßte in der Grundlegung gehörig umgearbeitet werden, soll man es empfehlen können. Wie gesagt, ein solches Buch muß besser sein als andere, denn der wenig bewanderte Leser kann ja nicht kontrollieren.

Hamel. 542

Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER,** o. Prof. a. d. T. H. Dresden, Vermessungskunde. III. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. (Sammlg. Göschen Bd. 862.) 3. Aufl. 144 S. mit 63 Fig. Berlin u. Leipzig 1934, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Die dritte Auflage enthält den gleichen, durch den Untertitel gekennzeichneten Stoff wie die vorhergehende, verbessert durch Neubearbeitung zahlreicher Stellen und durch einzelne Erweiterungen.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 528

Prof. Dr. A. **WITTING,** Oberstudienrat i. R., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. (Sammlg. Göschen Bd. 147.) 118 S. mit 32 Fig. und 305 Beispielen. Berlin und Leipzig 1934, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis 1,62 M.

Die Neubearbeitung dieses Göschenbändchens schließt sich eng an die vom gleichen Verf. neubearbeitete Integralrechnung an. Sie bringt das Wesentliche des dort behandelten Stoffes in kurzer Zusammenfassung und zu seiner Einübung eine große Zahl zum Teil sehr hübscher Aufgaben. Resultate dieser Beispiele und meist auch der Gang der Lösungen werden angegeben.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 528

W. **HEISENBERG,** Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaften. Zwei Vorträge. 45 S. Leipzig 1935, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 2 M.

Der erste vor der Naturforscherversammlung in Hannover 1934 gehaltene Vortrag „Wandlungen der Grundlagen der exakten Naturwissenschaften in jüngster Zeit“ gibt ein wundervoll klares Bild der Entwicklung der modernen Physik insbesondere des Sinnes dieser Entwicklung und zeigt, wie sich die neuen Ideen in der weiteren Gestaltung des naturwissenschaftlichen und erkenntnistheoretischen Denkens auswirken können. Der zweite Vortrag „Zur Geschichte der physikalischen Naturerklärung“

wurde 1932 vor der Sächs. Akademie der Wissenschaften gehalten. Er untersucht, beginnend mit den griechischen Naturphilosophen, inwieweit die heutige Forschung als konsequente Fortsetzung der Jahrtausende alten Bemühung des Menschen um ein Verständnis der Natur gelten kann. Dabei weist er nach, wie jeder Fortschritt der Naturwissenschaften durch einen Verzicht auf ein Lebendigmachen des sinnlich unmittelbar gegebenen Phänomens erkauft wird, wie immer mehr nur der mathematisch-formale Kern herausgeschält wird. Dadurch gewinnt die Forschung die Möglichkeit, große Erfahrungsgebiete zu umspannen, schafft dem menschlichen Geiste neue Formen des Denkens und neue Freiheiten und gibt ein auch für die anderen Wissenschaften wichtiges Beispiel, wie eine außerordentliche Erweiterung der letzten, abstrakten Grundlagen unseres Denkens möglich ist, ohne daß dafür die geringste Unklarheit oder Unschärfe in Kauf genommen werden muß.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 528

Physikalische Vorträge für Ingenieure, veranstaltet von der physikalischen Gesellschaft Zürich in der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. 110 S. Zürich, Leipzig und Stuttgart 1935, Verlag Rascher & Co. A.-G. Preis kart. 2 M.

In diesen im Sommersemester 1934 in Zürich gehaltenen Vorträgen wurden vier verschiedene Themen behandelt. Scherrer sprach über Kristallstruktur und Festigkeit und über neue Erkenntnisse auf dem Gebiet der Strahlung, Sänger über die physikalische Deutung des Ferromagnetismus und Fischer über elektroakustische Übertragungssysteme. Die Vorträge geben eine gut lesbare Einführung und machen in bequemer Art mit den neueren Forschungsergebnissen der behandelten Gebiete bekannt.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 528

Dr. KAZIMIERZ **BARTEL,** Prof. a. d. Techn. Hochschule in Lemberg, Malerische Perspektive. Grundsätze, Geschichtlicher Überblick, Ästhetik. Bd. I. Deutsch hrsg. v. Dr. W. HAACK, Priv.-Doz. f. Math. a. d. Techn. Hochsch. Danzig-Langfuhr. VIII + 339 S. m. 404 Abb. im Text. Leipzig u. Berlin 1934, Verlag von B. G. Teubner. Preis geb. 16 M.

Als Vorbereitung für eine eingehende Behandlung des Fragenkreises, der den Zusammenhang zwischen der mathematischen Perspektive und der bildenden Kunst umfaßt, entwickelt der vorliegende erste Band die grundlegenden Gesetze der ebenen Perspektive, sowie die Grundzüge ihrer Verwendung in der „freien Perspektive des Malers“ und in der „gebundenen Perspektive des Architekten“; er erweitert seinen Stoff und vertieft die geometrische Auffassung durch die Kapitel über die Kegelschnitte, die Rotationsflächen, die Spiegelbilder und die Schattenkonstruktionen. Die Darstellung ist mathematisch durchaus befriedigend und dabei leicht verständlich; sie wird unterstützt durch eine große Anzahl trefflicher Figuren und belebt durch lehrreiche Ausblicke auf die Anwendungen, wie z. B. auf die photographische Perspektive, auf den Wert eines genauen perspektiven Bildes für den Entwurf des Architekten, auf die Konstruktion von Perspektographen.

Dresden. W. Ludwig. 543

Dr.-Ing. M. **LIWSCHITZ,** Oberingenieur der Siemens-Schuckert-Werke, Berlin. Die elektrischen Maschinen. Bd. III: Berechnung und Bemessung, unter Mitarb. von Dr.-Ing. H. RAYMUND. 380 S. + 307 Abb. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 22,50 M.

In dem vorliegenden neuen 3. Band sind sowohl die Grundlagen als auch die auf die neuesten praktischen Erfahrungen fußenden Methoden der Berechnung und Bemessung der elektrischen Maschinen in guter, knapper und verständlicher Darstellung entwickelt und durch praktische Beispiele unter Beschränkung auf das Wesentliche erschöpfend ergänzt.

Damit steht dem Ingenieur der Praxis, dem Lehrer und dem Studierenden ein wertvolles Handbuch zur Verfügung.

Freiberg (Sa.). W. Krug. 544

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. KARL **KARAS,** Privat- und Honorardozent a. d. Deutsch. Techn. Hochsch. Brünn, Die kritischen Drehzahlen wichtiger Rotormen. IV + 154 S. m. 40 Textabb. u. 22 Zahlentaf. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 18 M.

Dr. RUDOLF **ROTHE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Höhere Mathematik, Tl. III, Raumkurven und Flächen, Linienintegrale und mehrfache Integrale, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 23.) IX + 238 S. m. 170 Fig. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 6,60 M.

Dr. phil. LUDWIG **FÖPPL,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. München, Dr.-Ing. HEINZ **NEUBER,** Privatdozent a. d. Techn. Hochschule München, Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. 115 S. m. 80 Abb. München und Berlin 1935, Verlag R. Oldenbourg. Preis kart. 6,60 M.

Prof. Dr. HANS **LORENZ,** Ballistik, die mechanischen und thermischen Grundlagen der Lehre vom Schuß. 3. Aufl. 132 S. m. 62 Textabb. München und Berlin 1935, Verlag R. Oldenbourg. Preis geh. 4 M.

Dr. EMIL **EVERLING,** Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Dr.-Ing. habil. HORST **MÜLLER,** Dozent a. d. Techn. Hochsch. Hannover, Mechanik des Motor- und Segelfluges. (Samml. Göschen, Bd. 841.) 126 S. m. 42 Abb. Berlin und Leipzig 1936, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis i. Lein. geb. 1,62 M.

CARL **NASKE,** VDI, Zivilingenieur Berlin, Integraltafeln. IV + 48 S. Leipzig 1935, Verlag Otto Spamer G. m. b. H. Preis 2,80 M.

JAKOB **NIELSEN,** Prof. d. theor. Mech. a. d. Techn. Hochschule Kopenhagen, Vorlesungen über Elementare Mechanik. (Sammlung Die Grundlehren der Mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XLIV.) Übersetzt u. bearb. v. Werner Fenchel. X + 500 S. m. 164 Abb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 38 M, geb. 39,60 M.

EUKLID, Die Elemente (übersetzt und herausgegeb. von Clemens Thaer). III. Teil, Buch VII—IX. (Samml. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 240.) 80 S. Leipzig 1935, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis kart. 3,60 M.

Dr. J. **WESTENBERG,** Die „Slide-Cell“-Methode von Wolff und Ras zum Nachweis von Gurwitsch-Strahlen. XII + 81 S. Amsterdam 1935, Verlag N. V. Noord-Hollandsche Uitgeversmaatschappij. Preis brosch. Fl. holl. 1,90.

PIERRE DE **HALLER,** Dr. sc. tech., L'influence des limites de la veine fluide sur les caractéristiques aérodynamiques d'une surface portante. (Public. de l'Institut d'Aérodynamique de l'Ecole Polytechnique Fédérale.) 55 S. Zürich 1934, Verlag S. A. Leemann Frères & Co.

Nationalpolitische Übungsstoffe für den Rechenunterricht, bearb. von OTTO **KÖHLER** und Dr. ULRICH **GRAF,** Ergänzungsheft zu den Rechenbüchern von Dr. Ph. Lötzbeyer und Dr. A. Molthan. (Samml. Ehlermanns Mathematisches Unterrichtswerk, hrsg. von Otto Köhler und Dr. Ulrich Graf.) 42 S. Dresden 1936, Verlag von L. Ehlermann. Preis kart. 0,80 M.

Prof. Dr. A. **THUM** VDI und Dr.-Ing. K. **OESER,** Gummifederung für ortsfeste Maschinen. Heft 6 der Mitteilungen der Materialprüfungsanstalt an der Techn. Hochschule Darmstadt, hrsg. v. Prof. Dr. A. Thum. VIII + 72 S. mit 52 Abb. und 7 Zahlentafeln. Berlin 1935, VDI-Verlag. Preis 6,50 M.

K. **ULLER,** Das Grundgesetz der Wellenfortpflanzung aus bewegter Quelle im bewegten Mittel. 138 S. m. 21 Abb. München 1935, Verlag R. Oldenbourg. Preis 5 M.

Prof. Dr. A. **THUM** VDI und Dr.-Ing. F. **DEBUS** VDI, Vorspannung und Dauerhaltbarkeit von Schraubenverbindungen. Heft 7 der Mitt. der Materialprüfungsanstalt an der Techn. Hochschule Darmstadt. VIII + 72 S. mit 90 Abb. und 8 Zahlentafeln. Berlin 1936, VDI-Verlag. Preis 6,50 M.

Dr.-Ing. BRUNO **ECK,** Leiter des Strömungslaboratoriums der höheren technischen Staatslehranstalten in Köln, Einführung in die technische Strömungslehre. Bd. I. Theoretische Grundlagen. VI + 134 S. Mit 155 Abb. Berlin 1935, Verlag J. Springer. Preis geb. 7,80 M.

Dr. H. **DÄNZNER,** Ass. am phys. Institut der Universität Frankfurt, Grundlagen der Quantenmechanik. Wissensch. Forschungsberichte, Naturwissensch. Reihe, Bd. 35, hrsg. v. Dr. R. E. Liesegang, Frankfurt. XI + 163 S. mit 11 Abb. Dresden und Leipzig 1935, Verlag von Theodor Steinkopff. Preis geb. 13 M.

GRIMSEHL, Lehrbuch der Physik. Neubearbeitet von Dr. R. Tomaschek, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden. Erster Band. Mechanik, Wärmelehre, Akustik. 9. Aufl. VIII + 647 S. m. 740 Abb. Leipzig und Berlin 1936, B. G. Teubner. Preis geb. 19,80 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik u. Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 13. Dezember 1935 hielt Hr. Dr. Günther Schulz-Berlin einen Vortrag über „Das Problem der Iterationen in der Statistik".

Am 6. Februar 1936 sprach Hr. Prof. W. Kucharski-Berlin zur „Theorie der Saite mit größeren Ausschlägen" (mit Versuchen).

Am 20. Februar 1936 spricht Hr. Dr. Ing. habil. H. Buchholz-Berlin über „Die Anwendung eines komplexen Integrationsverfahrens auf die Berechnung von Wirbelstromverlusten".

Persönliches.

Der Dozent in der Fakultät für Bauwesen der Techn. Hochschule in Hannover, Hr. Dr. Ludwig, ist beauftragt worden, in der genannten Fakultät die Mathematik und Mechanik für Vermessungsingenieure in Vorlesungen und Übungen zu vertreten.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

„Über den Heaviside-Calcul." Herr Dr. Gauster, Wien, wendet sich in einer erneuten Zuschrift an den Herausgeber gegen die Erwiderung des Herrn Vahlen auf seine Zuschrift über den „Heaviside-Calcul" (Band 15, 1935, Heft 5, Seite 309). Die Schriftleitung ist jedoch der Ansicht, daß durch die Ausführungen in Heft 5, 1935, die Fragen so weit geklärt sind, daß der sachkundige Leser in die Lage versetzt ist, sich selbst ein Urteil zu bilden, so daß ihr eine Fortsetzung der Diskussion nicht mehr erforderlich erscheint.

Druckfehlerberichtigung: In der Zuschrift über den Heaviside-Calcul, Band 15, Heft 5, Seite 310, ist ein Druckfehler zu berichtigen. Auf Zeile 15 von unten, linke Spalte ist

$$\lim_{x \to 0,\ x < 0} f^{(r)}(x) = 0 \quad \text{statt} \quad \lim_{x \to 0,\ x > 0} f^{(r)}(x) = 0$$

zu setzen.

„Die Bestimmung der Knicklast gedrückter rechteckiger Platten." Herr A. Weinstein macht mich darauf aufmerksam, daß er das Ergebnis seiner Untersuchungen über die Stabilität gedrückter, rechteckiger Platten, deren ausführliche Darstellung in der von mir (Fußnote 1, Seite 339) zitierten Arbeit: „On a minimum problem in the theory of elasticity" (Journal o. L. M. S. Bd. 10, S. 184) erfolgt ist, bereits im Januar 1935 in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1935, S. 107 mitgeteilt hat. Diese Mitteilung war mir leider entgangen. Es kann darnach kein Zweifel sein, daß Herr Weinstein die Priorität für seine Arbeit mit Recht beansprucht.

Trefftz. 579

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz